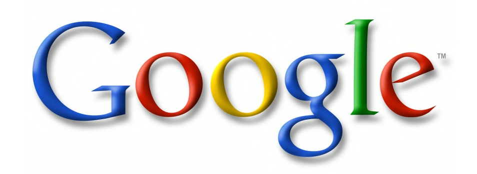
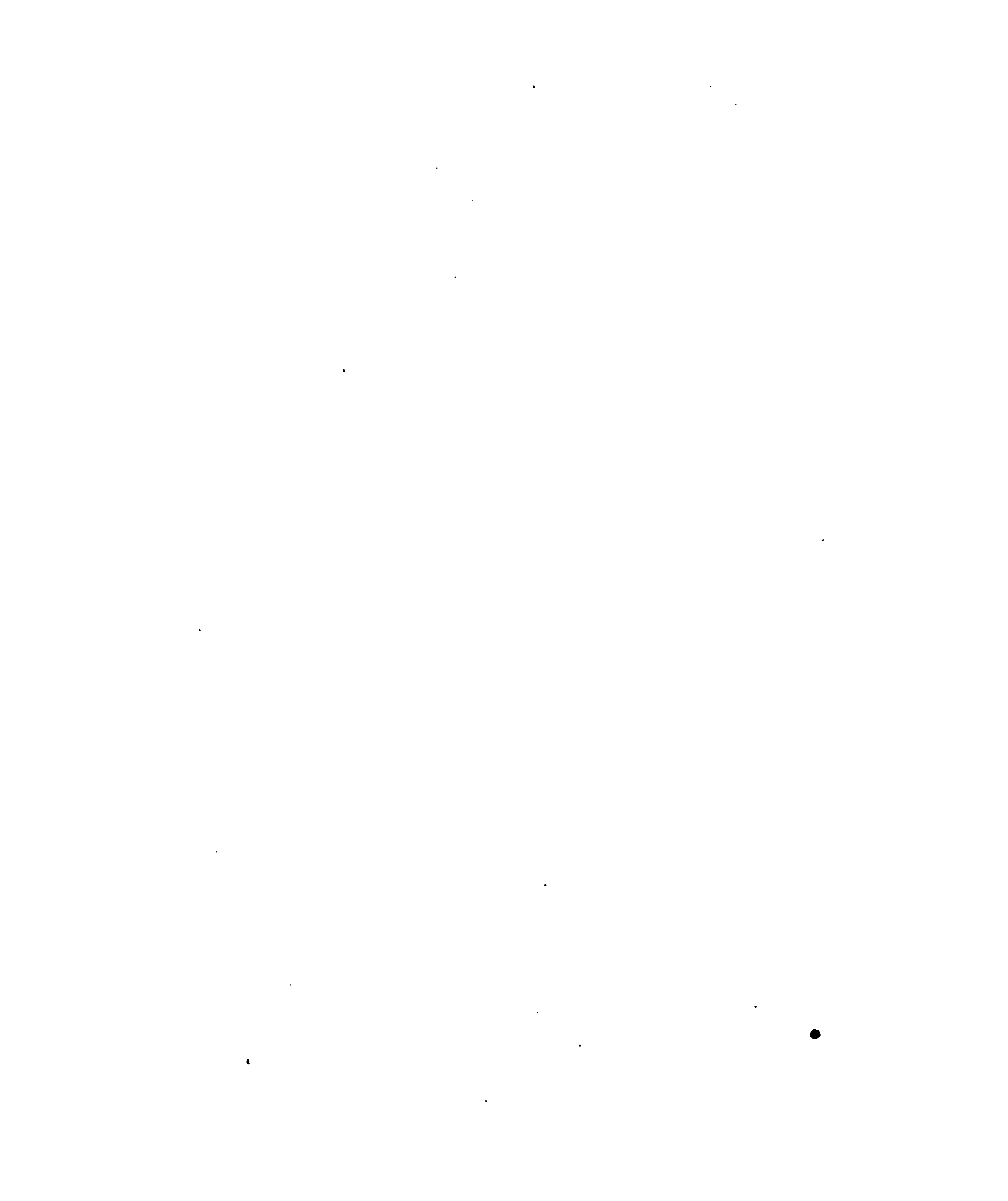




NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06908265 3





Vollständiger Lehrbegriff

der

reinen Combinationslehre

mit Anwendungen derselben

auf

Analysis

und

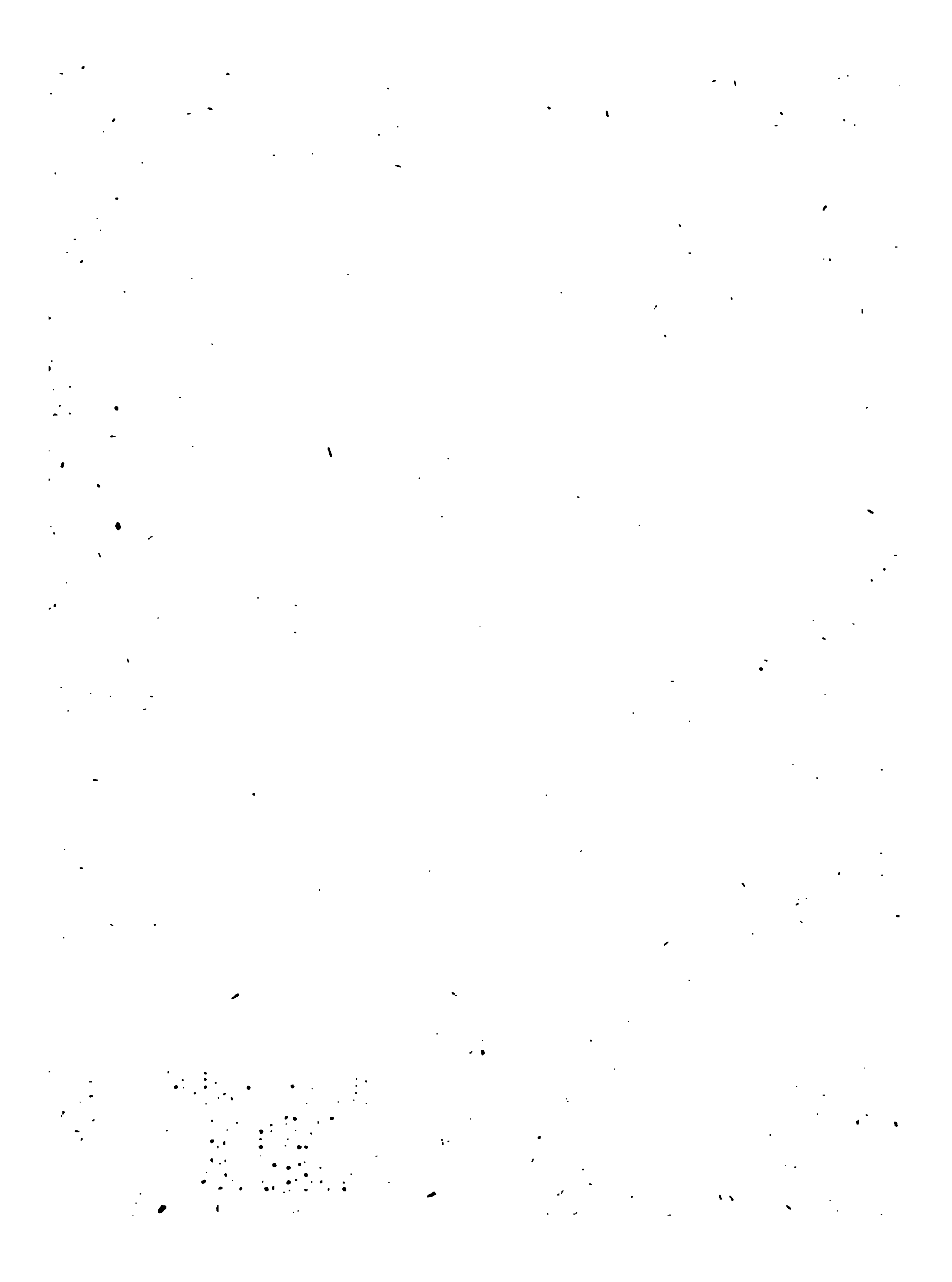
Wahrscheinlichkeitsrechnung

von

Dr. Friedrich Wilhelm Spehr.

Felix, qui didicit rerum cognoscere causas.
V.

Braunschweig, 1824.
Im Kunst- und geographischen Büreau.



Seiner Wohlgebornen

dem

Herrn Hofrath Hellwig

in Braunschweig,

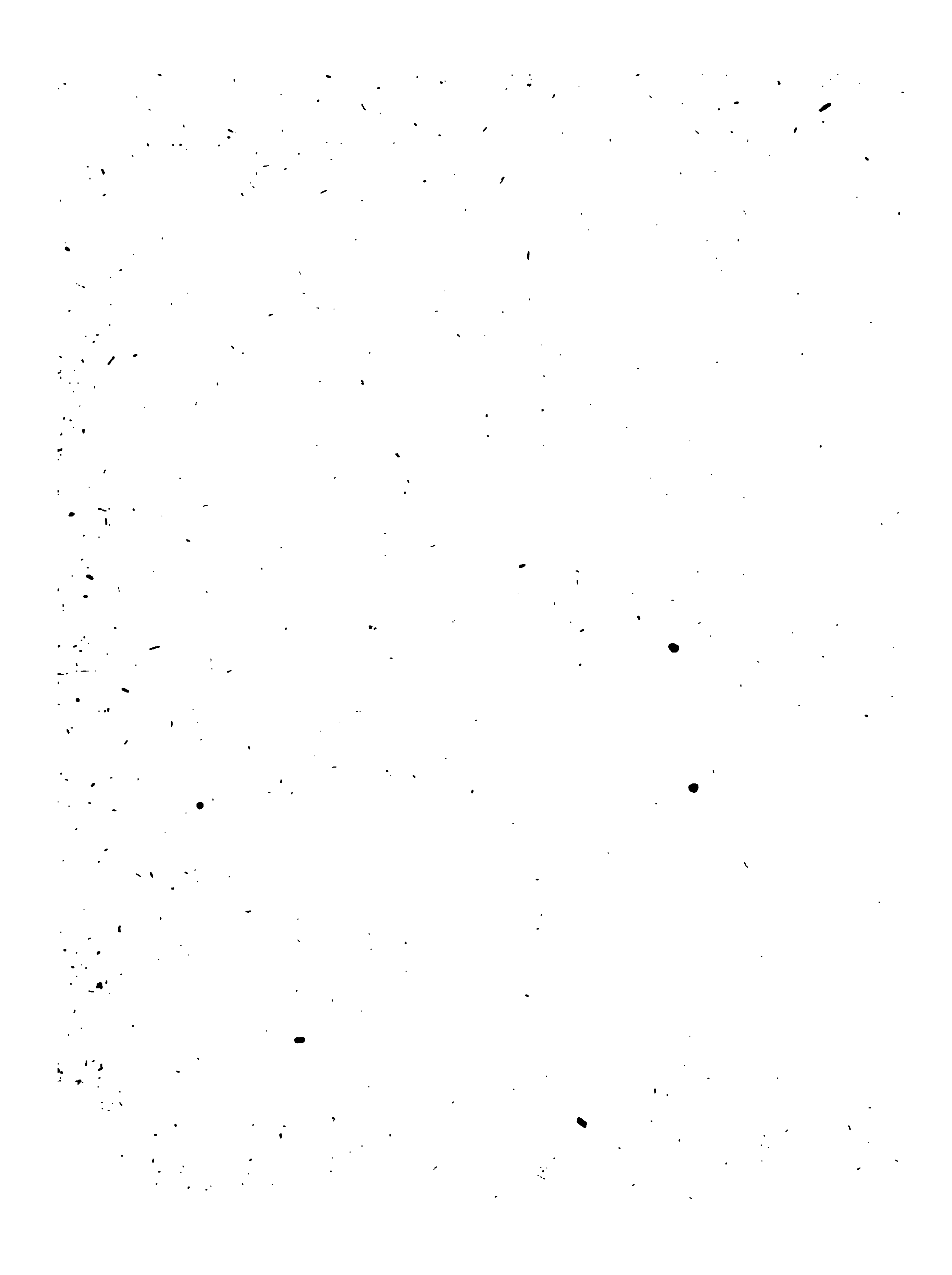
seinem ihm unvergeßlichen Lehrer,

widmet dieses Werk

als ein schwaches Zeichen unauslöschlicher Dankbarkeit

hochachtungsvoll

der Verfasser.



Vorrede.

Früher, als man die Combinationslehre noch nicht als nothwendige Basis der Analysis, sondern nur als eine Hülfe bei analytischen Untersuchungen ansah, mag es vielleicht zu entschuldigen gewesen seyn, wenn man ihre Lehren als einen Inbegriff auf Glauben anzunehmender Regeln darstellte.

Es gab ehedem neben der gewöhnlichen Analysis auch noch eine combinatorische, während man sich jetzt von der Nothwendigkeit, die Combinationslehre als Vorgängerinn der Analysis zu betrachten, überzeugt hat. Aber deswegen muß sich auch die Art ihrer Darstellung ändern; sie muß als früherer Theil einer mathemathischen Wissenschaft selbst streng wissenschaftlich behandelt werden.

Man pflegt sich wohl zu wundern, daß die Combinationslehre bei dem großen Einflusse, welchen sie auf die Analysis behauptet, doch noch nicht allgemein verbreitet ist, ja, selbst von Mathematikern als eine der Mathematik höchst entbehrliche, das Studium derselben nur hindernde Wissenschaft angesehen wird. Hat man denn aber Ursache, denjenigen anzuklagen, welcher, so eben das Studium der evidenten Elementarmathematik verlassend, gezwungen ist, den Uebergang zu höheren Theilen seiner Wissenschaft mit Regeln zu machen, die ihm als unbedingte Wahrheiten ohne irgend ein Warum aufgedrungen werden, und der bei der Foderung, auf diese Regeln ein wissenschaftliches System der Analysis zu gründen, Anstoß findet? Als Axiome können die Regeln der Erzeugung combinatorischer Zusammenstellungen nicht angesehen

werden; sollen sie also evident seyn, so bedürfen sie einer Demonstration. Wenn der Anfänger nach den gewöhnlichen Regeln seine Zusammenstellungen gemacht hat, so verpflichtet ihn noch nichts, überzeugt zu seyn, er habe die Complexionen, welche der Operationen gemäß hervorgehen müssen, in ihrer Vollständigkeit gebildet.

Solche Regeln gab man sowohl für das independente, als auch für das recurrirende Verfahren, oder leitete das letztere von dem erstern ab, indem man auf die Anschauung auf die schon independent gebildeten Formen verwies. Man siehet, heißt es dann gewöhnlich, in den Formen die und die Ordnung der Elemente; man kann sie daher wieder eben so ordnen, und hat damit also eine zweite Art der Bildung. Man siehet ja aber immer nur an einem Beispiele, wenn also auch die Sinne nicht trügen, so ist doch das, was man siehet, particulär, und kann zufällig seyn. Das Verfahren, die recurrirende Bestimmung von der independenten abzuleiten, ist wissenschaftlich; nur darf es nicht heißen, man siehet, daß die Elemente in der und der Ordnung auf einander folgen, sondern man muß darthun, daß sie den allgemeinen independenten Gesetzen der Bildung gemäß, nicht anders stehen können.

Zu dieser Methode, wenn es überhaupt Methode genannt werden kann, kommt nun noch die unbequeme und ermüdende ältere Bezeichnung; ein zweiter Grund, warum es so vielen Mathematikern, und besonders den Ausländern noch immer nicht gefallen hat, sich der deutschen Erfindung und ihrer so bedeutenden Vortheile zu bedienen.

Die wissenschaftliche Bearbeitung der Combinationslehre ist daher jetzt, wo die Analysis anfängt, sich wissenschaftlich zu gestalten, ein dringendes Bedürfniß.

Der Zweck der Bearbeitung des Lehrbuches, welches ich dem mathematischen Publicum hier vorzulegen wage, ist, mit dazu beizutragen, den Unvollkommenheiten der bisherigen Combinationslehre abzuhelfen. Möchten bald geübtere und einsichtsvollere Mathematiker dasjenige verbessern, was ich übersah, damit man an dieser Wissenschaft, welche gleich nach ihrem Entstehen so lange schlief, nicht noch länger Anstoß nehme.

Daß es mir wenigstens darum zu thun gewesen ist, die Gesetze, nach welchen die Formen der verschiedenen combinatorischen Operationen hervorgehen, aus ihren Gründen herzuleiten, die Recursionsformeln daraus wissenschaftlich zu entwickeln und mich überhaupt einer Methode zu bedienen, welche einer Wissenschaft angemessen ist, liegt wohl einem jeden, besonders, wenn er die ältere Darstellungs-Art kennt, auf den ersten Blick vor Augen. Diejenigen Mathematiker also, denen es um ihre Wissenschaft wirklich zu thun ist, werden meine Arbeit, sey sie mehr, oder weniger gelungen, nicht gänzlich verschmähen; während nun freilich an dem Wohlwollen derjenigen, welche ex orationibus alienis librum componere solent, nicht viel gelegen seyn kann, ob es gleich jeder combinatorische Schriftsteller unbedingt erhalten sollte, indem er ihnen ja die Theorie von dem zeigt, was sie bisher nur mechanisch gethan haben. *)

Was die gebrauchte Bezeichnung anbetrifft, so ist sie im

*) Siehet ein solcher die einzelnen Verschiedenheiten der vorhandenen Lehrbücher als Elementen-Reihen an, und bildet daraus alle Variationsformen; so bietet ihm jede Complexion, realisirt, ein Lehrbuch dar; und will er die Anzahl aller möglichen Lehrbücher, welche er schreiben kann, wissen, so kann er sie nach §. 50 leicht berechnen. Diese Anzahl wird er ziemlich groß finden, und damit den Trost erhalten, daß noch manche Ostermesse dazu gehöre, ehe er seine Wissenschaft als erschöpft ansehen könne.

Wesentlichen die, welche der Herr Hofrath Thibaut zuerst angewandt hat. *) Sie ist durchaus wissenschaftlich und allgemein, und verlangt von dem Gedächtnisse nur wenig. Schon Hindenburg that dieser Bezeichnungs-Art Erwähnung; **) man kann es jedoch dem trefflichen Erfinder, welcher sich an seine eigne Bezeichnung längst gewöhnt hatte, nicht zur Last legen, wenn er sich ihrer nicht bediente; obgleich dadurch schon vieles für die weitere Verbreitung geschehen wäre.

Die combinatorischen Operationen, welche nur irgend von einigem Nutzen sind, und auf die Analysis Einfluß haben können, sind hier vollständig abgehandelt und jedes einzelne Verfahren, dergleichen man vorzüglich bei den Combinationen sehr viele antrifft, ist mit Beispielen hinlänglich erläutert, damit sich der Lernende zuerst an diesen einige Uebung verschaffe, welche er darauf durch selbst gewählte Exempel vergrößern muß.

Bei den combinatorischen Operationen, welche auf Summen Bezug haben, sind auch solche Elemente mit zur Betrachtung gezogen, deren Indices negative Zahlen oder 0 sind; eine Annahme, die der Allgemeinheit wegen gemacht werden mußte.

Am Schlusse der reinen Combinationslehre habe ich eine Uebersicht aller abgeleiteten Recursionsformeln beigefügt; in der That ein nothwendiger Anhang, weil man diese Beziehungen nicht allein sehr oft gebraucht, und es daher von großem Nutzen ist, wenn man sie sämmtlich bei einander findet, sondern auch, weil sich bei solcher Uebersicht das Eigenthümliche einer jeden Formel durch das Vergleichen mit den übrigen leichter zeigt und dem Gedächtnisse einprägt.

---

*) Grundriß der allgemeinen Arithmetik. Göttingen. 1809.

**) Sammlung combinator. analyt. Abhandlungen. Leipz. 1800. 2te Samml. Vorb. S. XVII. ff.

Die Anwendungen auf die Analysis enthalten die gewöhnlichen Gegenstände, allein die Art und Weise ihrer Ableitung ist neu.

Die Einleitung giebt dem Anfänger einen allgemeinen Begriff von dem, was man Hauptgröße, Function, Reihe u. s. w. nennt, und setzt den wichtigen Schluß der Identität zweier Recursionen ins Licht. Durch diesen Schluß werden im Folgenden fast alle gefoderten Beziehungen unter den Größen, und zwar mit Leichtigkeit und Wissenschaftlichkeit, gefunden. Namentlich sind durch denselben im ersten Abschnitte, nachdem man einige recurrirende Beziehungen unter den Facultäten betrachtet finden wird, die allgemeinen Ausdrücke für die Anzahl der Formen zur Ableitung gebracht, welche bei den verschiedenen combinatorischen Operationen hervorgehen.

Im zweiten Abschnitte sind die Sätze auf Wahrscheinlichkeit angewandt. Der Zweck dieses Abschnittes ist nur, dem Anfänger einen deutlichen Begriff von der jetzt so vielfach besprochenen Wahrscheinlichkeitsrechnung zu geben, weshalb man seine Kürze entschuldigen wird.

Der dritte Abschnitt behandelt die Multiplication. Hier und im Folgenden habe ich hinsichtlich der Exponenten der Hauptgröße, nach welchen die Reihen fortschreiten, sogleich den allgemeinsten Fall betrachtet, wie dieses die Analysis als Wissenschaft überall zu thun gezwungen ist. Auch hier wird alles durch den Schluß der Identität zweier Recursionen geleistet.

Bei der Division, welche der vierte Abschnitt abhandelt, wird der Anfänger, obgleich ich mit dem allgemeinsten Falle angefangen habe, bei weitem die Schwierigkeiten nicht antreffen, welche er gewöhnlich dabei zu finden glaubt. Auch habe ich hier nicht, wie es sonst wohl zu geschehen pflegt, die Coefficienten im Divisor an-

fänglich negativ und das erste Glied desselben der Einheit gleich angenommen, sondern gleich allgemein gezeigt, daß man diese Coefficienten, um daraus die gefoderten Glieder des Quotienten zusammenzusetzen, mit umgekehrtem Zeichen nehmen, und sie durch den anfänglichen dividiren müsse, welches sowohl bei der independenten als recurrirenden Form beobachtet werden muß.

Je allgemeiner man die Voraussetzungen macht, desto leichter pflegt die analytische Untersuchung zu seyn. Man gründet gewöhnlich den allgemeinen polynomischen Lehrsatz auf das Binomialtheorem, gehet also vom specielleren Falle zum allgemeineren über. Der fünfte und sechste Abschnitt behandelt die Potenziirung und Wurzelausziehung, und demonstrirt die genannten beiden Theoreme in der Allgemeinheit, d. h. für jeden Exponenten gültig, dergestalt, daß der allgemeinere Fall nicht aus dem specielleren deducirt, sondern der letztere aus dem ersteren durch Specialisirung hervorgehet. Dabei habe ich mich eines Beweises bedient, welchen ich schon früher bekannt gemacht habe, *) und der bei weitem so weitläufig nicht ist, als die ältern blos für das Binomialtheorem gegebenen.

Der letzte Abschnitt bringt die Exponentialreihe zur Ableitung. Der Beweis ist gleichfalls neu, und scheint mir weit einfacher zu seyn, als dieses bei andern der Fall ist.

Braunschweig, im März 1824.

Dr. F. W. Spehr.

*) De quantitate fluente tractatus, in quo explicantur fundamenta calculi differentialis nonnisi ex notione fluentis deducta. Accedit theorematis infinitinomialis indeterminati exponentis sine poneudo theoremate binomiali demonstratio universalis. Brunsv. 1823.

Inhalt

Reine Combinationslehre.

Einleitung.

		Seite
§. 1.	Begriff der Combinationslehre	1
§. 2.	Elemente, Rang unter denselben	1
§. 3.	Rang unter den Complexionen, lexicographische und arithmographische Anordnung	2
§. 4.	Allgemeine Vorschriften zur Bildung der Complexionen	4
§. 5.	Combinatorische Operationen	6
§. 6.	Bezeichnung	8
§. 7.	Independentes und recurrirendes Verfahren	9
§. 8.	Geschichtliche Uebersicht der Combinationslehre	11

Erster Abschnitt.

Von den combinatorischen Operationen, insofern sie nur auf eine Reihe von Elementen Bezug haben.

Kapitel I. Vom Permutiren.

§. 9.	Independentes Verfahren	16
§. 10.	Recurrirendes Verfahren	19
§. 11.	Independente Erzeugung einzelner Ordnungen	23
§. 12.	Von der Anzahl der möglichen Permutationsformen	24

Kapitel II. Vom Combiniren.

§. 13.	Vom Combiniren im Allgemeinen	26

I. Vom Combiniren an sich.

A. Bei verbotener Wiederholbarkeit der Elemente.

§. 14.	Independentes Verfahren	28
§. 15.	Recurrirendes Verfahren	31

B. Bei unbedingter Wiederholbarkeit der Elemente.

§. 16.	Independentes Verfahren	51
§. 17.	Recurrirendes Verfahren	53

Seite

C. Bei bedingter Wiederholbarkeit der Elemente.

§. 18. Independentes Verfahren 67
§. 19. Recurrirendes Verfahren 68

D. Von der independenten Erzeugung einzelner Ordnungen der Combinationsklassen.

§. 20. 69

II. Vom Combiniren zu bestimmten Summen.

A. Von der Bildung einzelner Klassen zu vorgeschriebenen Summen.

§. 21. Vom Combiniren zu bestimmten Summen im Allgemeinen 72

1) Bei verbotener Wiederholbarkeit der Elemente.

§. 22. Independentes Verfahren 75
§. 23. Recurrirendes Verfahren 78

2) Bei unbedingter Wiederholbarkeit der Elemente.

§. 24. Independentes Verfahren 81
§. 25. Recurrirendes Verfahren 83

3) Von der independenten Bestimmung einzelner Ordnungen.

§. 26. 90

B. Von der Bildung aller Klassen, welche die vorgeschriebene Summe zuläßt.

§. 27. Von der Operation im Allgemeinen 92
§. 28. Independentes Verfahren 93
§. 32. (soll heißen §. 29. so auch alle folgenden §. zu verändern) Recurr. Verfahren 95

Zweiter Abschnitt.

Von den combinatorischen Operationen, insofern sie auf mehrere Elementenreihen Beziehung haben.

§. 33. Vom Variiren im Allgemeinen 99

I. Vom Variiren an sich.

A. Von der Bildung der Variationsformen aus vollständigen Reihen.

§. 34. Independentes Verfahren 101
§. 35. Recurrirendes Verfahren 103
§. 36. Die Indices der Elemente erscheinen bei den Variationsformen in allen Combinationen, welche sich aus ihnen bilden lassen, und jede derselben in allen ihren Versetzungen 108

B. Von der Bildung der Variationsformen aus unvollständigen Reihen.

§. 37. Independentes Verfahren 111
§. 38. Recurrirendes Verfahren 114

Seite

II. Vom Variiren zu bestimmten Summen.

§. 39. Vom Variiren zu bestimmten Summen im Allgemeinen 115

A. Von der Bildung einzelner Klassen zu vorgeschriebenen Summen.

§. 40. Independentes Verfahren 116
§. 41. Recurrirendes Verfahren 120

B. Von der Bildung aller Klassen, welche bei vorgeschriebener Summe möglich sind.

§. 42. Von der Operation im Allgemeinen 124
§. 43. Independentes Verfahren 125
§. 44. Recurrirendes Verfahren 127
Uebersicht aller abgeleiteten Recursionsformeln 129

Anwendungen der reinen Combinationslehre auf die Analysis.

Einleitung.

§. 45. Begriff der Hauptgröße. Function. Reihe 138
§. 46. Begriff der Analysis 141
§. 47. Von den Arten der Functionen 141
§. 48. Independente und recurrirende Bestimmung der Glieder einer Reihe. Uebergang von der einen Bestimmung zur andern 143

Erster Abschnitt.

Von den Facultäten und ihren recurrirenden Beziehungen.

§. 49. Von den Facultäten 148
§. 50. Bestimmung der Anzahl der combinatorischen Formen 155

Zweiter Abschnitt.

Anwendung der Combinationslehre auf einige einfache Fälle der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§. 51 Begriff von Wahrscheinlichkeit 167
§. 52. Berechnung der Wahrscheinlichkeiten bei Spielen 169

Dritter Abschnitt.

Multiplication zusammengesetzter Formen.

§. 53. Bildung der Producte aus Factoren von der Form $\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} \ldots$ . . 177
§. 54. Producte aus Factoren von der Form $\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots$ 181
§. 55. Producte aus Factoren von der Form $(\overset{1}{a} + x)$ 188

Einleitung.

§. 1.

Begriff der Combinationslehre.

Die Foderung, aus gewissen gegebenen Dingen alle möglichen Zusammenstellungen, welche nach vorher festgesetzten Bedingungen aus ihnen hervorgehen können, wissenschaftlich zu erzeugen, ist das Object der Combinationslehre.

Die reine Combinationslehre leitet, absehend von der Natur oder Beschaffenheit der zusammenzustellenden Dinge, welche sie sich daher nur als vorhanden seyend gedenkt, die Gesetze ab, nach welchen die Zusammenstellungen aus jenen Dingen hervorgehen; sie ist die Wissenschaft von den Gesetzen des Zusammenstellens gegebener Dinge.

§. 2.

Elemente, Rang unter denselben.

Wenn man sich aber gleich um die Beschaffenheit der Dinge nicht bekümmert, so ist es doch nöthig, sich dieselben als von einander verschieden vorzustellen, damit man aus der Verschiedenheit der sich in den Zusammenstellungen befindenden Elemente auf die Verschiedenheit der Zusammenstellungen selbst schließen könne.

1

Wesentlichen die, welche der Herr Hofrath Thibaut zuerst angewandt hat. *) Sie ist durchaus wissenschaftlich und allgemein, und verlangt von dem Gedächtnisse nur wenig. Schon Hindenburg that dieser Bezeichnungs-Art Erwähnung; **) man kann es jedoch dem trefflichen Erfinder, welcher sich an seine eigne Bezeichnung längst gewöhnt hatte, nicht zur Last legen, wenn er sich ihrer nicht bediente; obgleich dadurch schon vieles für die weitere Verbreitung geschehen wäre.

Die combinatorischen Operationen, welche nur irgend von einigem Nutzen sind, und auf die Analysis Einfluß haben können, sind hier vollständig abgehandelt und jedes einzelne Verfahren, dergleichen man vorzüglich bei den Combinationen sehr viele antrifft, ist mit Beispielen hinlänglich erläutert, damit sich der Lernende zuerst an diesen einige Uebung verschaffe, welche er darauf durch selbst gewählte Exempel vergrößern muß.

Bei den combinatorischen Operationen, welche auf Summen Bezug haben, sind auch solche Elemente mit zur Betrachtung gezogen, deren Indices negative Zahlen oder 0 sind; eine Annahme, die der Allgemeinheit wegen gemacht werden mußte.

Am Schlusse der reinen Combinationslehre habe ich eine Uebersicht aller abgeleiteten Recursionsformeln beigefügt; in der That ein nothwendiger Anhang, weil man diese Beziehungen nicht allein sehr oft gebraucht, und es daher von großem Nutzen ist, wenn man sie sämmtlich bei einander findet, sondern auch, weil sich bei solcher Uebersicht das Eigenthümliche einer jeden Formel durch das Vergleichen mit den übrigen leichter zeigt und dem Gedächtnisse einprägt.

---

*) Grundriß der allgemeinen Arithmetik. Göttingen. 1809.

**) Sammlung combinator. analyt. Abhandlungen. Leipz. 1800. 2te Samml. Vorb. S. XVII. ff.

Die Anwendungen auf die Analysis enthalten die gewöhnlichen Gegenstände, allein die Art und Weise ihrer Ableitung ist neu.

Die Einleitung giebt dem Anfänger einen allgemeinen Begriff von dem, was man Hauptgröße, Function, Reihe u. s. w. nennt, und setzt den wichtigen Schluß der Identität zweier Recursionen ins Licht. Durch diesen Schluß werden im Folgenden fast alle gefoderten Beziehungen unter den Größen, und zwar mit Leichtigkeit und Wissenschaftlichkeit, gefunden. Namentlich sind durch denselben im ersten Abschnitte, nachdem man einige recurrirende Beziehungen unter den Facultäten betrachtet finden wird, die allgemeinen Ausdrücke für die Anzahl der Formen zur Ableitung gebracht, welche bei den verschiedenen combinatorischen Operationen hervorgehen.

Im zweiten Abschnitte sind die Sätze auf Wahrscheinlichkeit angewandt. Der Zweck dieses Abschnittes ist nur, dem Anfänger einen deutlichen Begriff von der jetzt so vielfach besprochenen Wahrscheinlichkeitsrechnung zu geben, weshalb man seine Kürze entschuldigen wird.

Der dritte Abschnitt behandelt die Multiplication. Hier und im Folgenden habe ich hinsichtlich der Exponenten der Hauptgröße, nach welchen die Reihen fortschreiten, sogleich den allgemeinsten Fall betrachtet, wie dieses die Analysis als Wissenschaft überall zu thun gezwungen ist. Auch hier wird alles durch den Schluß der Identität zweier Recursionen geleistet.

Bei der Division, welche der vierte Abschnitt abhandelt, wird der Anfänger, obgleich ich mit dem allgemeinsten Falle angefangen habe, bei weitem die Schwierigkeiten nicht antreffen, welche er gewöhnlich dabei zu finden glaubt. Auch habe ich hier nicht, wie es sonst wohl zu geschehen pflegt, die Coefficienten im Divisor an-

)(

fänglich negativ und das erste Glied desselben der Einheit gleich angenommen, sondern gleich allgemein gezeigt, daß man diese Coefficienten, um daraus die gefoderten Glieder des Quotienten zusammenzusetzen, mit umgekehrtem Zeichen nehmen, und sie durch den anfänglichen dividiren müsse, welches sowohl bei der independenten als recurrirenden Form beobachtet werden muß.

Je allgemeiner man die Voraussetzungen macht, desto leichter pflegt die analytische Untersuchung zu seyn. Man gründet gewöhnlich den allgemeinen polynomischen Lehrsatz auf das Binomialtheorem, gehet also vom specielleren Falle zum allgemeineren über. Der fünfte und sechste Abschnitt behandelt die Potenziirung und Wurzelausziehung, und demonstrirt die genannten beiden Theoreme in der Allgemeinheit, d. h. für jeden Exponenten gültig, dergestalt, daß der allgemeinere Fall nicht aus dem specielleren deducirt, sondern der letztere aus dem ersteren durch Specialisirung hervorgehet. Dabei habe ich mich eines Beweises bedient, welchen ich schon früher bekannt gemacht habe, *) und der bei weitem so weitläufig nicht ist, als die ältern blos für das Binomialtheorem gegebenen.

Der letzte Abschnitt bringt die Exponentialreihe zur Ableitung. Der Beweis ist gleichfalls neu, und scheint mir weit einfacher zu seyn, als dieses bei andern der Fall ist.

Braunschweig, im März 1824.

Dr. F. W. Spehr.

*) De quantitate fluente tractatus, in quo explicantur fundamenta calculi differentialis nonnisi ex notione fluentis deducta. Accedit theorematis infinitinomialis indeterminati exponentis sine ponendo theoremate binomiali demonstratio universalis. Brunsv. 1823.

Inhalt.

Reine Combinationslehre.

Einleitung.

		Seite
§. 1.	Begriff der Combinationslehre	1
§. 2.	Elemente, Rang unter denselben	1
§. 3.	Rang unter den Complexionen, lexicographische und arithmographische Anordnung	2
§. 4.	Allgemeine Vorschriften zur Bildung der Complexionen	4
§. 5.	Combinatorische Operationen	6
§. 6.	Bezeichnung	8
§. 7.	Independentes und recurrirendes Verfahren	9
§. 8.	Geschichtliche Uebersicht der Combinationslehre	11

Erster Abschnitt.

Von den combinatorischen Operationen, insofern sie nur auf eine Reihe von Elementen Bezug haben.

Kapitel I. Vom Permutiren.

§. 9.	Independentes Verfahren	16
§. 10.	Recurrirendes Verfahren	19
§. 11.	Independente Erzeugung einzelner Ordnungen	23
§. 12.	Von der Anzahl der möglichen Permutationsformen	24

Kapitel II. Vom Combiniren.

§. 13.	Vom Combiniren im Allgemeinen	26

I. Vom Combiniren an sich.

A. Bei verbotener Wiederholbarkeit der Elemente.

§. 14.	Independentes Verfahren	28
§. 15.	Recurrirendes Verfahren	31

B. Bei unbedingter Wiederholbarkeit der Elemente.

§. 16.	Independentes Verfahren	51
§. 17.	Recurrirendes Verfahren	53

fänglich negativ und das erste Glied desselben der Einheit gleich angenommen, sondern gleich allgemein gezeigt, daß man diese Coefficienten, um daraus die gefoderten Glieder des Quotienten zusammenzusetzen, mit umgekehrtem Zeichen nehmen, und sie durch den anfänglichen dividiren müsse, welches sowohl bei der independenten als recurrirenden Form beobachtet werden muß.

Je allgemeiner man die Voraussetzungen macht, desto leichter pflegt die analytische Untersuchung zu seyn. Man gründet gewöhnlich den allgemeinen polynomischen Lehrsatz auf das Binomialtheorem, gehet also vom specielleren Falle zum allgemeineren über. Der fünfte und sechste Abschnitt behandelt die Potenziirung und Wurzelausziehung, und demonstrirt die genannten beiden Theoreme in der Allgemeinheit, d. h. für jeden Exponenten gültig, dergestalt, daß der allgemeinere Fall nicht aus dem specielleren deducirt, sondern der letztere aus dem ersteren durch Specialisirung hervorgehet. Dabei habe ich mich eines Beweises bedient, welchen ich schon früher bekannt gemacht habe, *) und der bei weitem so weitläufig nicht ist, als die ältern blos für das Binomialtheorem gegebenen.

Der letzte Abschnitt bringt die Exponentialreihe zur Ableitung. Der Beweis ist gleichfalls neu, und scheint mir weit einfacher zu seyn, als dieses bei andern der Fall ist.

Braunschweig, im März 1824.

Dr. F. W. Spehr.

*) De quantitate fluente tractatus, in quo explicantur fundamenta calculi differentialis nonnisi ex notione fluentis deducta. Accedit theorematis infinitinomialis indeterminati exponentis sine ponendo theoremate binomiali demonstratio universalis. Brunsv. 1823.

Inhalt.

Reine Combinationslehre.

Einleitung.

		Seite
§. 1.	Begriff der Combinationslehre	1
§. 2.	Elemente, Rang unter denselben	1
§. 3.	Rang unter den Complexionen, lexicographische und arithmographische Anordnung	2
§. 4.	Allgemeine Vorschriften zur Bildung der Complexionen	4
§. 5.	Combinatorische Operationen	6
§. 6.	Bezeichnung	8
§. 7.	Independentes und recurrirendes Verfahren	9
§. 8.	Geschichtliche Uebersicht der Combinationslehre	11

Erster Abschnitt.

Von den combinatorischen Operationen, insofern sie nur auf eine Reihe von Elementen Bezug haben.

Kapitel I. Vom Permutiren.

§. 9.	Independentes Verfahren	16
§. 10.	Recurrirendes Verfahren	19
§. 11.	Independente Erzeugung einzelner Ordnungen	23
§. 12.	Von der Anzahl der möglichen Permutationsformen	24

Kapitel II. Vom Combiniren.

§. 13.	Vom Combiniren im Allgemeinen	26

I. Vom Combiniren an sich.

A. Bei verbotener Wiederholbarkeit der Elemente.

§. 14.	Independentes Verfahren	28
§. 15.	Recurrirendes Verfahren	31

B. Bei unbedingter Wiederholbarkeit der Elemente.

§. 16.	Independentes Verfahren	51
§. 17.	Recurrirendes Verfahren	53

Seite

C. Bei bedingter Wiederholbarkeit der Elemente.

§. 18. Independentes Verfahren 67
§. 19. Recurrirendes Verfahren 68

D. Von der independenten Erzeugung einzelner Ordnungen der Combinationsklassen.

§. 20. 69

II. Vom Combiniren zu bestimmten Summen.

A. Von der Bildung einzelner Klassen zu vorgeschriebenen Summen.

§. 21. Vom Combiniren zu bestimmten Summen im Allgemeinen 72

1) Bei verbotener Wiederholbarkeit der Elemente.

§. 22. Independentes Verfahren 75
§. 23. Recurrirendes Verfahren 78

2) Bei unbedingter Wiederholbarkeit der Elemente.

§. 24. Independentes Verfahren 81
§. 25. Recurrirendes Verfahren 83

3) Von der independenten Bestimmung einzelner Ordnungen.

§. 26. 90

B. Von der Bildung aller Klassen, welche die vorgeschriebene Summe zuläßt.

§. 27. Von der Operation im Allgemeinen 92
§. 28. Independentes Verfahren 93
§. 32. (soll heißen §. 29. so auch alle folgenden §. zu verändern) Recurr. Verfahren 95

Zweiter Abschnitt.

Von den combinatorischen Operationen, insofern sie auf mehrere Elementenreihen Beziehung haben.

§. 33. Vom Variiren im Allgemeinen 99

I. Vom Variiren an sich.

A. Von der Bildung der Variationsformen aus vollständigen Reihen.

§. 34. Independentes Verfahren 101
§. 35. Recurrirendes Verfahren 103
§. 36. Die Indices der Elemente erscheinen bei den Variationsformen in allen Combinationen, welche sich aus ihnen bilden lassen, und jede derselben in allen ihren Versetzungen 108

B. Von der Bildung der Variationsformen aus unvollständigen Reihen.

§. 37. Independentes Verfahren 111
§. 38. Recurrirendes Verfahren 114

Seite

II. Vom Variiren zu bestimmten Summen.

§. 39. Vom Variiren zu bestimmten Summen im Allgemeinen 115

A. Von der Bildung einzelner Klassen zu vorgeschriebenen Summen.

§. 40. Independentes Verfahren 116
§. 41. Recurrirendes Verfahren 120

B. Von der Bildung aller Klassen, welche bei vorgeschriebener Summe möglich sind.

§. 42. Von der Operation im Allgemeinen 124
§. 43. Independentes Verfahren 125
§. 44. Recurrirendes Verfahren 127
Uebersicht aller abgeleiteten Recursionsformeln 129

Anwendungen der reinen Combinationslehre auf die Analysis.

Einleitung.

§. 45. Begriff der Hauptgröße. Function. Reihe 138
§. 46. Begriff der Analysis 141
§. 47. Von den Arten der Functionen 141
§. 48. Independente und recurrirende Bestimmung der Glieder einer Reihe. Uebergang von der einen Bestimmung zur andern 143

Erster Abschnitt.

Von den Facultäten und ihren recurrirenden Beziehungen.

§. 49. Von den Facultäten 148
§. 50. Bestimmung der Anzahl der combinatorischen Formen 155

Zweiter Abschnitt.

Anwendung der Combinationslehre auf einige einfache Fälle der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§. 51 Begriff von Wahrscheinlichkeit 167
§. 52. Berechnung der Wahrscheinlichkeiten bei Spielen 169

Dritter Abschnitt.

Multiplication zusammengesetzter Formen.

§. 53. Bildung der Producte aus Factoren von der Form $\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} \ldots$ 177
§. 54. Producte aus Factoren von der Form $\overset{0}{a} x^{\alpha} + \overset{1}{a} x^{\alpha+\delta} \ldots$ 181
§. 55. Producte aus Factoren von der Form $\overset{1}{(a + x)}$ 188

Seite

Vierter Abschnitt.

Division zusammengesetzter Formen.

§. 56. Recurrirende Bestimmung der Glieder eines Quotienten von der Form

$\dfrac{1}{\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots}$ 191

§. 57. Independente Bestimmung 195

§. 58. Bestimmung der Glieder des Restes 198

§. 59. Recurrirende Bestimmung der Glieder eines Quotienten von der Form:

$\dfrac{\overset{0}{b}x^{\alpha} + \overset{1}{b}x^{\alpha+\delta} \ldots}{\overset{0}{a}x^{a} + \overset{1}{a}x^{a+\delta} \ldots}$ 200

§. 60. Independente Bestimmung 202

§. 61. Bestimmung des Restes 204

Fünfter Abschnitt.

Potenziirung zusammengesetzter Formen. Polynomischer und binomischer Lehrsatz für ganze positive Exponenten.

§. 62. Indep. Bestimmung der Glieder eines zu einer Potenz erhobenen Polynomii 207

§. 63. Recurrirende Bestimmung 209

§. 64. Binomischer Lehrsatz, Binomialcoefficienten 216

Sechster Abschnitt.

Ausziehung der Wurzeln aus zusammengesetzten Formen. Polynomischer und binomischer Lehrsatz für gebrochene und negative Exponenten.

§. 65. Recurrirende Bestimmung 221

§. 66. Independente Bestimmung 224

Siebenter Abschnitt.

Exponentiation. Ableitung der Exponentialreihe.

§. 67. Independente Bestimmung der Glieder der Exponentialreihe 228

§. 68. Recurrirende Bestimmung 230

Reine Combinationslehre.

Einleitung.

§. 1.

Begriff der Combinationslehre.

Die Foderung, aus gewissen gegebenen Dingen alle möglichen Zusammenstellungen, welche nach vorher festgesetzten Bedingungen aus ihnen hervorgehen können, wissenschaftlich zu erzeugen, ist das Object der Combinationslehre.

Die reine Combinationslehre leitet, absehend von der Natur oder Beschaffenheit der zusammenzustellenden Dinge, welche sie sich daher nur als vorhanden seyend gedenkt, die Gesetze ab, nach welchen die Zusammenstellungen aus jenen Dingen hervorgehen; sie ist die Wissenschaft von den Gesetzen des Zusammenstellens gegebener Dinge.

§. 2.

Elemente, Rang unter denselben.

Wenn man sich aber gleich um die Beschaffenheit der Dinge nicht bekümmert, so ist es doch nöthig, sich dieselben als von einander verschieden vorzustellen, damit man aus der Verschiedenheit der sich in den Zusammenstellungen befindenden Elemente auf die Verschiedenheit der Zusammenstellungen selbst schließen könne.

Soll nun aber das Erzeugen jener Zusammenstellungen nach festen Regeln geschehen, so kann es nicht einerlei seyn, welche Elemente, oder wie man sie jedesmal zusammenstellt; denn alsdann wäre es dem Zufalle überlassen, ob man sie alle zu Stande brächte, und welche man bildete. Man muß nothwendig alle Elemente nach und nach zur Betrachtung ziehen, d. h. man muß an ihnen nicht allein Verschiedenheit, sondern auch Folge wahrnehmen. Zur Versinnlichung der zusammenzustellenden Dinge ist man daher gezwungen, solche Zeichen einzuführen, an denen man schon eine Folge, einen Rang zu bemerken gewöhnt ist. Die schicklichste Bezeichnung geschieht also durch die Ziffern des dekadischen Zahlensystems; alle andern Zeichen sind unvollkommen und unwissenschaftlich, weil man ihnen erst einen Rang beilegen, d. h. dem Gedächtnisse unnöthiger Weise eine fremde Zifferschrift aufdringen müßte, welche man doch, wenn sie überhaupt erlernt werden sollte, nach den Regeln der Zahlensysteme einzurichten gezwungen wäre.

Sobald sich also gewisse Dinge zu combinatorischen Zusammenstellungen vereinigen sollen, so zähle man sie, und lasse jedem als stellvertretendes Zeichen die Zahl, welche es bei dem Acte des Zählens getroffen hat.

Die reine Combinationslehre nennt die zusammenzustellenden Dinge Elemente, die Zusammenstellungen selbst Formen oder Complexionen, deren Klasse mit der Anzahl der in ihnen enthaltenen Elemente übereinstimmt, so, daß allgemein eine Complexion von der kten Klasse ist, wenn sie k Elemente enthält.

§. 3.

Rang unter den Complexionen, lexicographische und arithmographische Anordnung.

Aus der Idee niedrigerer und höherer Elemente entspringt sogleich die niedrigerer und höherer Zusammenstellungen; auch unter diesen wird es einen Rang geben, welcher von dem Range der in ihnen befindlichen Elemente abhängt. Man legt jeder Complexion soviel Stellen bei, als sie Elemente in sich begreifen soll. Jenachdem diese Stellen mit niedrigeren oder höheren Elementen besetzt sind, jenachdem wird man die Form niedriger oder höher nennen.

Vergleicht man, um von zwei Formen die höhere zu erkennen, nach und nach

ihre Stellen, so wird die erste, worin beide von einander abweichen, schon einen hinlänglichen Grund der Verschiedenheit darbieten. Findet man also, nachdem man alle vorhergehenden Stellen in beiden Formen gleich besetzt angetroffen hat, daß die eine in der nächstfolgenden Stelle ein höheres Element besitzt, als die andere in der gleich hohen, so wird man jene höher nennen, als diese.

Es ist nun gleichgültig, ob man bei der ersten Stelle linker Hand, oder bei der ersten rechter Hand anfangen will, die Stellen zu betrachten; thut man das erste, so ist die erste Stelle linker Hand die niedrigste, die folgenden die nächsthöheren, die letzte endlich, oder die erste rechter Hand die höchste Stelle der Form.

Es bedarf nur dieser Annahme, um gegebene Formen nach ihrer Höhe zu ordnen. Hätte man z. B. die Formen: 1235, 1243 und 1234 der Höhe nach zu stellen, so siehet man sogleich, daß die letzte niedriger ist, als die erste, denn in ihr stehet in der vierten Stelle, als der ersten, worin beide von einander abweichen, ein höheres Element, als in derselben Stelle bei jener. Aus eben dem Grunde ist aber die zweite Form höher, als die erste, und sie werden daher folgendermaßen ihrer Höhe nach geordnet erscheinen: 1234, 1235, 1243. Käme noch eine Form 1242 hinzu, so wäre diese höher, als die zweite in jener Anordnung, niedriger aber, als die dritte. Die vier Formen müssen daher so geordnet werden: 1234, 1235, 1242, 1243.

Es mögen daher so viel Formen gegeben seyn, als man will, man wird sie alle durch wiederholtes Zwischensetzen nach ihrem Range ordnen können, welche Anordnung man die lexicographische nennt. Es ist jedoch dieses ursprüngliche Verfahren etwas beschwerlich, man kann es aber, wie auf den ersten Blick erhellt, sehr vereinfachen. Alle Formen, welche niedrigere Elemente in der ersten Stelle besitzen, werden in der lexicographischen Anordnung allen denen vorangehen, welche höhere Elemente an der Spitze führen. Alle Formen, welche ein und dasselbe Anfangs-Element haben, gehören zu derselben Ordnung, (Ordnung des ersten Grades) und man nennt den Inbegriff der Formen, welche das niedrigste Element in der ersten Stelle besitzen, die niedrigste Ordnung, (niedrigste Ordnung des ersten Grades) allgemein, den Inbegriff der Formen, welche das rte Element in der ersten Stelle haben, die rte Ordnung (des ersten Grades). Faßt man nun aus der Menge lexicographisch zu ordnender Formen alle diejenigen jedesmal zusammen, welche dasselbe Anfangs-Element haben,

und ordnet die Inbegriffe nach diesen Anfangs-Elementen, so wird man sämtliche Formen schon nach den Ordnungen richtig zusammengestellt haben, und es ist dann nur noch nöthig, die Formen jeder Ordnung unter sich lexicographisch zu stellen. In einer Ordnung aber, wenn man ihre Formen lexicographisch zusammenstellen will, werden diejenigen, welche ein niedrigeres Element in der zweiten Stelle haben, denen vorangehen müssen, welche ein höheres Element in derselben Stelle besitzen. Ordnet man also die Formen einer Ordnung nach den Elementen der zweiten Stelle, so wird man sie schon nach ihren nächsten Unterordnungen (Ordnungen des zweiten Grades) zusammengestellt haben. So kann man mit den Ordnungen eines jeden Grades verfahren, und man wird auf diese Weise jede gegebene Menge von Formen leicht lexicographisch zu ordnen im Stande seyn.

Sind die Formen unter sich in der Klasse verschieden, d. h. besitzen sie nicht alle eine gleiche Anzahl von Elementen, so kann man den ganzen Inbegriff erst nach den successiven Klassen ordnen, ehe man jede dieser Klassen lexicographisch zusammenstellt. Diese Anordnung heißt die arithmographische.

Folgende Formen:

123, 124, 13, 16, 121, 53, 171, 233, 214, 3, 25, 34, 51, 36, 41, 43, 543, 351, 1234, 1151, 7, 813, 127

werden lexicographisch so geordnet erscheinen:

1151, 121, 123, 1234, 124, 127, 13, 16, 171, 214, 233, 25, 3, 34 351, 36, 41, 43, 51, 53, 541, 7, 813.

arithmographisch aber so zu stehen kommen:

3, 7, 13, 16, 25, 34, 36, 41, 43, 51, 53, 121, 123, 124, 127, 171, 214, 233, 351, 543, 813, 1151, 1234.

§. 4.

Allgemeine Vorschriften zur Bildung der Complexionen.

Gedenkt man sich also aus gegebenen Elementen alle möglichen Formen erzeugt, die nach einer gewissen vorgeschriebenen Bedingung hervorgehen können, so kann man sie sich lexicographisch geordnet vorstellen, und diese Anordnung bietet ein

Mittel bar, die Formen selbst zu erzeugen, welches offenbar allemal geschehen kann, wenn man im Stande ist, die niedrigste Form zu bilden, und im Besitz einer allgemeinen Regel ist, vermöge deren man aus irgend einer Form die nächsthöhere ableiten kann.

Besetzt man alle Stellen einer Form von der ersten anfangend, successiv mit den niedrigsten Elementen, welche man in seiner Gewalt hat, d. h. setzt man in die niedrigste Stelle das niedrigste Element, welches gegeben ist, in die zweite darauf das niedrigste von denen, welche noch übrig sind, u. s. f. so wird man dadurch die niedrigste Form erzeugt haben, denn es kann keine Form geben, welche, nachdem man sie mit jener in allen vorhergehenden Stellen zusammenstimmend gefunden hat, in der folgenden Stelle ein niedrigeres Element besitzt, als sie.

Zwei Formen werden in der lexicographischen Anordnung desto näher bei einander zu stehen kommen, in je mehr Stellen sie, von der ersten an gerechnet, ununterbrochen mit einander übereinkommen; zwei Formen, deren successiv frühere Stellen gleich besetzt sind, werden in ihrer Höhe desto weniger von einander abweichen, je weniger die Elemente in der folgenden Stelle von einander verschieden sind. Sobald also eine Form die nächsthöhere von einer andern seyn soll, so wird jene in der spätest möglichen Stelle ein so wenig, als möglich, höheres Element besitzen, als diese; d. h. wenn man aus einer Form die nächsthöhere Form ableiten will, so ist erfoderlich, daß man in die späteste Stelle der ersten, die überhaupt einer Erhöhung fähig ist, ein Element setze, welches so wenig, als möglich höher ist, als das, welches in ihr steht.

Ist die erhöhete Stelle nicht etwa die letzte, so ist es nicht gleichgültig, wie die folgenden Stellen besetzt werden. Erhöhet man in einer Form die späteste Stelle, welche überhaupt eine Erhöhung verträgt, so wenig, als möglich, wie es zur Ableitung der nächsthöhern Form erfoderlich ist, so ist durch diesen Act allein die nächsthöhere Form noch nicht gebildet, man wird nur, wenn allgemein die erhöhete Stelle die rte war, eine Form hervorgebracht haben, die der nächsthöheren Ordnung des rten Grades angehört, ob es aber, wie es gefodert wird, die niedrigste Form dieser Ordnung des rten Grades ist, das kommt noch auf die Besetzung der folgenden Stellen nach der rten an. Sind aber diese successiv so niedrig besetzt, als möglich, d. h.

machen diese Stellen für sich betrachtet die niedrigste Form aus, die sich aus den übrigen Elementen bilden läßt, so wird man die niedrigste Form jener nächsthöheren Ordnung des rten Grades, folglich die nächsthöhere Form von der anfänglichen abgeleitet haben.

Man wird also die beiden für die Combinationslehre so wichtigen Sätze folgendermaßen aussprechen können:

I. Will man bei irgend einer combinatorischen Operation die niedrigste Complexion bilden, so besetze man die successiven Stellen, bei der ersten anfangend, so niedrig, als man es vermag.

II. Um bei irgend einer combinatorischen Operation aus irgend einer Form die nächsthöhere abzuleiten, erhöhe man die späteste Stelle, welche einer Erhöhung fähig ist, so wenig, als möglich, und fülle alle folgenden Stellen, von der nächstfolgenden anfangend, so niedrig aus, als es sich thun läßt.

Diese allgemeinen Vorschriften werden durch die Natur der jedesmaligen Operation specialisirt, wobei das Wesentlichste auf die Frage ankommt, welche Stelle überhaupt als erhöhbar angesehen werden kann.

§. 5.

Combinatorische Operationen.

Nachdem wir nun den Begriff der Combinationslehre und den des Ranges der Elemente und Complexionen festgestellt haben, wollen wir im Allgemeinen untersuchen, was für combinatorische Operationen möglich sind.

Was zuerst die gegebenen, im Range successiv auf einander folgenden Elemente betrifft; so kann man die allgemeine Voraussetzung machen, daß entweder solche Elementenfolge nur einmal, oder mehrmal statt finde; d. h. daß entweder nur eine Reihe von Elementen, oder deren mehrere zur Erzeugung der Formen den

Stoff hergeben. Was ferner das Bilden der Formen selbst betrifft, so kann man bei einer Reihe von Elementen entweder annehmen, daß sich der ganze Inbegriff derselben jedesmal zu einer Form vereinige, oder, daß es jedesmal nur einige sind, welche zur Erzeugung einer Form aus der Reihe hervorgehoben werden.

Bei der ersten Voraussetzung kann die Verschiedenheit der Formen nur in der Verschiedenheit der Folge der Elemente bestehen; dieselben Stellen werden in der einen Form nicht durchaus von den nemlichen Elementen besetzt seyn, als in der andern, obgleich das einemal ganz dieselben Elemente in der Form sind, als das anderemal. Die Operation, nach welcher man die Folge gegebener Elemente auf alle mögliche Art verändert, heißt Permutation, Versetzung (permutatio seu transmutatio).

Bei der zweiten Voraussetzung kann Verschiedenheit der Formen dadurch hervorgebracht werden, daß man das einemal nicht durchaus die nemlichen Elemente hervorhebt, als das anderemal. Die so entstehenden Complexionen werden alle dem Inhalte nach von einander verschieden seyn, während die Permutationsformen nur in der Folge der Elemente von einander abweichen. Diese Operation heißt Combination (in engerem Sinne) (combinatio). Hiebei kann man nun aber entweder annehmen, daß sich alle Elemente so oft, als man will, oder nur bedingt wiederholen dürfen, d. h. daß bei jedem Elemente vorgeschrieben ist, wie oft es sich höchstens wiederholen dürfe, oder endlich, daß eine Wiederholung überall nicht statt finden solle. Bei der ersten Voraussetzung bildet man Combinationen bei unbedingter Wiederholbarkeit der Elemente (combinationes admissis repetitionibus). Im zweiten Falle, welcher jedoch weniger wichtig ist, leitet man Combinationen bei bedingter Wiederholbarkeit, im dritten endlich, Combinationen bei verbotener Wiederholbarkeit der Elemente (combinationes omissis repetitionibus) ab.

Nimmt man aber mehrere Reihen von Elementen an, um aus ihnen Formen zu erzeugen, so entstehen der Voraussetzungen, unter welchen man sich die Elemente jener Reihen zu Complexionen vereinigen läßt, mehrere. Die einfachste Annahme, und zugleich die, welche von allen combinatorischen Operationen in der Analysis die nächste Anwendung findet, ist die, daß zur Erzeugung einer Form jede Reihe ein

Element hergiebt. Die Klasse der zu bildenden Formen ist hier nicht mehr willkührlich, sondern wird jedesmal mit der Anzahl der Reihen übereinkommen. Die Operation, welche nach dieser Annahme alle möglichen Formen zu erzeugen lehrt, heißt Variation (variatio).

Die Idee des Variirens bei verbotener und zugelassener Wiederholbarkeit der Elemente entsprang aus einer falschen Ansicht von der Operation.

Da jedes Element seinen Rang hat, so wird jede Form, wenn man die Rangzahlen aller ihrer Elemente zusammenaddirt, eine gewisse Summe darbieten. Verlangt man von allen Combinations- oder Variationsformen, (die Permutationsformen einer Klasse geben immer dieselbe Summe) die sich aus gewissen Elementen bilden lassen, nur die, welche einer gewissen Summe angehören, so bildet man Combinationen oder Variationen zu bestimmten Summen (combinationes vel variationes numeri propositi).

§. 6.

Bezeichnung.

Um den Inbegriff aller Permutationsformen, welche sich aus den Elementen 1,2,...n bilden lassen, anzuzeigen, wollen wir uns des Zeichens P[1..n] bedienen. Eine Combinationsklasse werden wir durch das Zeichen C andeuten, wo die Klassenzahl (Klassen-Exponent) über dieses Zeichen die Zahl, welche die gefoderte Summe anzeigt, (Summen-Exponent) linkerhand neben dasselbe gesetzt wird, die Elemente endlich, aus denen sich die Klasse gebildet hat, oder bilden soll, in einer Klammer hinter dasselbe gesetzt werden, so, daß z. B. $\overset{k}{C}[1..r]$ den Inbegriff aller Combinationsformen aus den Elementen 1,2,3...r zur Klasse k; ${}^{n}\overset{k}{C}[1..r]$ hingegen von derselben Klasse, welche aus den nemlichen Elementen 1,2,3...r gebildet ist, diejenigen Formen andeute, welche der Summe n angehören. Bei verbotener Wiederholbarkeit der Elemente füge man dem Zeichen C rechter Hand ein kleines Komma bei, etwa C'. Bei bedingter Wiederholbarkeit wird man bei jedem Elemente andeuten müssen, wie

oft es höchstens wiederholt werden darf, z. B. $\overset{4}{C}[1,1,2,3,3,3,4]$ zeigt den Inbegriff aller Combinationsformen zur vierten Klasse aus den Elementen 1, 2, 3, 4 an, wovon das erste einmal, das zweite gar nicht, das dritte zweimal, das vierte wieder gar nicht wiederholt werden darf. Ist die Zahl, welche bei jedem Elemente die Wiederholbarkeit angiebt, (Wiederholungs-Exponent) größer, so kann man sie oberhalb daneben setzen. Z. B. $\overset{n}{C}[1^{\alpha}, 2^{\beta}, 3^{\gamma} \ldots m^{\mu}]$.

Zur Bezeichnung eines Inbegriffs von Variationsformen gebraucht man das Zeichen V, wobei dasselbe hinsichtlich der Klassen- und Summen-Exponenten statt findet. Der Klassen-Exponent zeigt dann die Menge der vorhandenen Reihen an, die in der Klammer stehenden Elemente bedeuten den allen diesen Reihen gemeinschaftlichen Index, wie dieses im Folgenden deutlich werden wird.

§. 7.

Independentes und recurrirendes Verfahren.

Ueberall, wo successive Verknüpfungen von Größen oder auch überhaupt von Dingen, nach einem sich immer gleichbleibenden Gesetze gebildet hervorgehen, so, daß also diese Verknüpfungen die Glieder einer Fortschreitung im Allgemeinen sind, da haben auch diese Glieder unter sich einen festen Zusammenhang; es läßt sich jedesmal eine Regel angeben, vermöge deren man aus einigen derselben ein anderes findet. So ist es überall in der Analysis, wo eine gesetzmäßige Reihe als Resultat einer Operation hervorgeht, so ist es auch in der Combinationslehre.

Man kann jedes Glied des Resultats für sich und unabhängig von jedem andern Gliede, rein aus den Größen oder Dingen, durch deren Verknüpfung jenes Resultat hervorgehen soll, darstellen; (independentes Verfahren, independente Bestimmung) man kann aber auch aus schon gebildeten früheren Gliedern des Resultats ein nachfolgendes ableiten. (Recurrirendes Verfahren, recurrirende Bestimmung.)

Durch das independente Verfahren ist man eben so gut, wie durch das recurrirende im Stande, alle Glieder successiv darzustellen, um so das ganze gefoderte

Resultat zu erhalten; man wird also durch das independente Verfahren, obgleich das recurrirende, so bald es darauf ankömmt, **alle** Glieder darzustellen, meistens bequemer ist, und das Resultat schneller zu Stande bringt, im Wesentlichen dasselbe leisten, als durch dieses; allein fodert man nur **ein** Glied des Resultats, so würde das recurrirende Verfahren zu weitläufig seyn. Sobald es also auf wirkliche Berechnung der Glieder ankommt, so scheint das independente Verfahren vor dem recurrirenden einen entschiedenen Vorzug zu haben; allein für die Wissenschaft selbst sind beide von gleichem Nutzen, von gleicher Nothwendigkeit. Oft werden Reihen, welche schon als Resultat einer Operation hervorgegangen sind, abermals zu neuen Resultaten verknüpft, wobei man sehr oft die allgemeinen Glieder, (terminos generales) zu betrachten hat, um mit ihnen das vorzunehmen, was man mit den ganzen Reihen zu thun, sich vorgesetzt hatte. In diesem Falle müssen die allgemeinen Glieder jedesmal independent dargestellt seyn, woraus schon die Nothwendigkeit dieser Bestimmungs-Art erhellet. Eben so unentbehrlich ist aber auch die recurrirende Regel; man kann ohne den Schluß der Identität zweier Recursionen nur in sehr wenigen Fällen Allgemeinheit erlangen. Dieses alles wird in der Folge ganz klar werden.

Wenn man aus gewissen gegebenen Elementen combinatorische Zusammenstellungen zur ersten, zweiten Klasse u. s. w. gemacht hat, so müssen diese Klassen, da sie sich nach einem und demselben Gesetze, oder nach der nemlichen Regel erzeugt haben, unter sich eine Recursion darbieten, d. h. man muß im Stande seyn, aus einigen dieser Klassen höhere abzuleiten.

So erscheinen hier die successiven Klassen als Glieder einer Fortschreitung.

Auch die Combinationen und Variationen zu bestimmten Summen werden in Absicht auf ihre Klassen sowohl, als auch in Absicht auf ihre Summen unter sich eine Recursion haben.

Das Verfahren bei der Bildung der **Formen** eines gewissen Inbegriffs, (§. 4) ist, wie aus dem eben Gesagten erhellet, recurrirend, der Inbegriff selbst wird aber independent erzeugt.

Die Regel, welche angiebt, wie man bei solchen Recursionen zu verfahren habe, läßt sich jedesmal leicht in Zeichen ausdrücken, und heißt alsdann eine **Recursionsformel**, und zwar eine **partielle**, wenn ein nachfolgendes Glied nur

aus einigen vorhergehenden abgeleitet wird, eine Totalrecursionsformel, wenn dies aus allen frühern Gliedern geschiehet.

§. 8.

Geschichtliche Uebersicht der Combinationslehre.

Man hatte schon in älteren Zeiten Begriffe von zusammenstellenden Operationen, entwickelte sie jedoch nicht wissenschaftlich, um sie auf reelle Gegenstände anwenden zu können.

Den ersten Gebrauch davon macht Raymund Lullius auf das Denken, indem er zeigte, wie man durch verschiedene Zusammenstellungen der Begriffe über Gegenstände reden könne, wovon man auch nicht die geringste Kenntniß besäße. Dieses ist der Gegenstand der sogenannten lullianischen Kunst, (artis magnae lullianae.) Aehnliches schrieb der berühmte Jesuit Athanasius Kircher (1), welcher unter andern auch eine combinatorische Anleitung zur richtigen Composition eines jeden Textes gab (2). Leibnitz wandte die Combinationslehre auf die Philosophie an. Seine ersten Ideen befinden sich in einer Dissertation (3), wo er sie meistentheils sehr glücklich anwandte. Nicht so mit seinem sogenannten philosophischen Calcul. Er vermuthete (4), daß sich vermöge eines solchen Denkens in Zeichen „de Deo ac mente non minus certo, quam de figuris numerisque" disputiren lasse.

Welchen Nutzen jedoch die Combinationslehre der Logik gewährt, davon überzeugt man sich bei Lambert (5), und besonders bei Kant (6). Lambert macht in seiner Semiotik (7) Anwendungen von den permutirten Combinationsformen auf

---

(1) Ars magna sciendi seu combinatoria. Amstel. 1669.

(2) Musurgia universalis. Romae 1650.

(3) De arte combinatoria ctr. Lips. 1666.

(4) Opp. Tom. III. pag. 34.

(5) Neues Organon. Leipz. 1764. Thl. I. §. 87 ff.

(6) Critik der reinen Vernunft. 5te Aufl. S. 102 ff.

(7) Neues Organon. Thl. II. §. 85 ff.

die Bildung der Wörter aus Buchstaben; früher hatte schon Guldin die Menge der Wörter berechnet, welche sich aus 23 Buchstaben zusammensetzen lassen, und gefunden, daß zum Drucke aller dieser Wörter mehr, als 25 Trillionen Bände, jeden zu 1000 Seiten, jede Seite zu 100 Zeilen, und jede Zeile zu 60 Buchstaben gerechnet, erfodert würden. Darauf berechnete Prestet die Anzahl der Wörter, welche sich aus 24 Buchstaben erzeugen lassen, und fand sie über 1391 Quinquillionen. Baco de Verulam (1) wendet die Combinationen bei der Bildung einer Zifferschrift an, Tobias Mayer (2) und Lambert bei Farbenmischungen u. s. w. Am meisten gebrauchte man sie jedoch zu Spielereien. J. W. Merbitz (3) wollte, indem er 8 wesentliche Theile des Gesichts: Auge, Nase, Stirn u. s. w. und von jedem dieser Theile 50 Verschiedenheiten annahm, die Mannigfaltigkeit aller menschlichen Gesichter darstellen. Die hier anzuwendende combinatorische Operation scheint er jedoch nicht gekannt zu haben, er permutirte, wo er hätte variiren sollen, und so konnte es allerdings nicht fehlen, daß, wie Kästner sagt (4), "Maul oben, Augen unter die Nase und Stirn zu unterst" zu stehen kam. Mehreres dergleichen findet man in Kästners angeführter Schrift.

Sehr an der Tagesordnung waren die Anagramme. Man versetzte die Buchstaben seines Namens auf alle mögliche Weise, um aus einem Worte, welches aus den Versetzungen etwa entstanden war, einen heimlichen Wink des Schicksals zu erkennen.

Jedoch finden sich auch schon, obgleich schwache, Spuren einer Anwendung der Combinationslehre auf die Analysis. Von dem engen Zusammenhange beider Wissenschaften hatte Leibnitz (5) wenigstens schon eine Ahndung. Jacob Bernulli (6) erkannte deutlich, daß die Glieder eines zu einer Potenz erhobenen Polynomii genau

---

(1) De augmentis scient. Lib. VI.

(2) Opp. ined. Tom. I. De offinitate catorum. §. 15 seqq.

(3) De varietate faciei humani, tract. phys. Dresd. 1676.

(4) Analysis des Endlichen. S. 38 ff.

(5) Opp. Tom. III.

(6) Opp. Tom. II. pag. 993.

mit den Combinationen zusammenhinge u. dgl. Auch Euler hat die Combinationen schon einer Betrachtung unterworfen ([1]).

Es waren aber dergleichen Anwendungen durchaus unwissenschaftlich und unvollkommen, weil man die Combinationslehre vorher noch keiner genauern Betrachtung unterworfen hatte, und sie gewährten der Analysis daher keinen besondern Vortheil.

Erst nachdem Hindenburg, Professor der Mathematik und Physik zu Leipzig, die für die Analysis so glückliche Idee gefaßt hatte, die Combinationslehre zum Gegenstande einer genaueren Betrachtung zu machen, konnte es gelingen, der Analysis Vortheile zu verschaffen, und sie nach und nach von einer kleinen unvollkommenen Wissenschaft, welche man Algebra nannte, zu einem unermeßlichen Felde der tiefsten Betrachtungen zu erweitern. Hindenburg hat das Verdienst, die Möglichkeit und Nothwendigkeit einer näheren Behandlung der Combinationslehre zuerst gezeigt zu haben; er ist unwidersprechlich als der Erfinder dieser Wissenschaft anzusehen. Besonders wurde er durch die Untersuchungen über Potenzen der Polynomien auf sie geleitet, seine ersten beiden Schriften aber über diesen Gegenstand ([2]) zeigen deutlich, wie sehr er schon früher über combinatorische Gegenstände speculirt hatte. Der rastlose Eifer, mit dem er für seine Wissenschaft arbeitete, verbunden mit den Untersuchungen mehrerer trefflichen Mathematiker, besonders Rothe, Kramp, Töpfer, v. Prasse, Eschenbach und einiger anderer, brachte in wenigen Jahren eine Wissenschaft hervor, der es vorbehalten war, die Mathematik im strengsten Sinne zu reformiren.

So glücklich aber auch Hindenburgs Erfindung ist, so viel Dank ihm die Nachwelt auch darzubringen gezwungen ist, so läßt sich doch nicht läugnen, daß sie in einigen Punkten noch viel zu wünschen übrig ließ.

([1]) Comm. Petrop. vet. T. XIII. (observationes analytic. de combinationibus).

([2]) Infinitinomii dignitatum leges ac formulae, Gotting. 1778 und Methodus nova et facilis serierum infinitarum exhibendi dignitates exponentis indeterminati. Lips. 1778. Beide Schriften erschienen darauf sehr vermehrt unter dem Titel: Infinitinomii dignitatum exponentis indeterm. historia leges ac formulae. Gotting. 1779.

Erstlich war die Bezeichnung höchst unvollkommen. Es wird nöthig seyn, das Wesentlichste derselben hier anzuführen.

Die Elemente bezeichnete er meistentheils durch die kleinen lateinischen Buchstaben. Man mußte also lernen, der wievielste Buchstabe ein jeder im Alphabete ist, und war gezwungen, sobald man über ein 25stes Element hinausgehen mußte, zu complicirteren Zeichen seine Zuflucht zu nehmen. Die Klassen bezeichnete er durch große lateinische Buchstaben, so, daß A die erste, B die zweite Klasse vorstellte u. s. w. Hiebei finden natürlich dieselben Mängel statt. Standen diese Buchstaben gerade, so bezeichneten sie Combinationsklassen, standen sie schief, Variationsklassen. Ein M oder N, welches aber aus einem andern Alphabete genommen war, bezeichnete nicht die 12te oder 13te Klasse, sondern allgemein die mte oder nte. Um einzelne Ordnungen anzudeuten, bediente man sich großer römischer Buchstaben, welche mit allerhand Häckchen und anderen Verzierungen versehen waren. Auch hier war es nicht einerlei, ob sie gerade oder schief standen, denn im ersten Falle waren es Combinationsformen, im anderen Variationsformen, die durch sie angedeutet wurden. Wir werden im Folgenden sehen, daß wir hiezu keines besondern Zeichens bedürfen. Hatte man nun allgemein eine mte Klasse durch M bezeichnet, so war die m + 1te nicht N, die m + 2te nicht O, eben so die m — 1te nicht L u. s. w, sondern man bediente sich hier der sogenannten Distanzbezeichnung:

$$\overset{-2}{M},\ \overset{-1}{M},\ M,\ \overset{+1}{M},\ \overset{+2}{M},\ \text{u. s. w.}$$

Wie nahe war man also einer wissenschaftlichen Bezeichnung!

Zweitens war auch der Vortrag der Combinationslehre einer Wissenschaft nicht angemessen. Man behandelte sie im strengsten Sinne als eine artem combinatoriam. Wer sie erlernen wollte, von dem verlangte man, daß er sich eine Fertigkeit in der Ausübung der Regeln erwerbe, welche man ihm, ohne Gründe anzuführen, gab. Daß man sie wie eine Kunst lehrte, das läßt sich deshalb nicht tadeln, weil sie im Grunde nichts anders seyn sollte; daß man aber auf die durch diese Kunst hervorgegangenen Resultate eine mathematische Wissenschaft gründen wollte, das war in jeder Rücksicht ein wenig unmathematisch. Soll die Combinationslehre das Fundament der Analysis seyn, so ist erfoderlich, daß sie eben so evident dargestellt

werde, wie die ersten Gründe der Elementarmathematik. Die Nichtbeachtung dieses nothwendigen Erfodernisses, so wie auch die Bezeichnungs-Art der Hindenburgischen Schule hat auf die Verbreitung der Combinationslehre und der combinatorischen Methode in der Analysis sehr nachtheilig wirken müssen, so, daß es jetzt, beinahe 40 Jahre nach der Erfindung, besonders außer Deutschland noch viele Mathematiker giebt, welche nichts für überflüssiger halten, als diese Wissenschaft.

Erster Abschnitt.

Von den combinatorischen Operationen, insofern sie nur auf eine Reihe von Elementen Beziehung haben.

Kapitel I.

Vom Permutiren.

§. 9.

Independentes Verfahren.

Eine gewisse Anzahl von Elementen, welche im Range successiv fortschreiten, ist gegeben, es wird gefodert, die Folge derselben auf alle mögliche Art zu verändern, oder, welches dasselbe ist, alle möglichen Permutationsformen, welche aus jenen Elementen hervorgehen können, zu erzeugen.

Um zuerst das independente Verfahren zu entwickeln, soll gezeigt werden, wie man sowohl die niedrigste Form erzeugen, als auch aus irgend einer Form die nächsthöhere ableiten könne.

Um die niedrigste Form zu erhalten, setze man alle Elemente in natürlicher Ordnung hintereinander. (Einleit. §. 4.) Sind z. B. die Elemente 13425 gegeben, so wird die niedrigste Form 12345 seyn. Diese Regel kann keine Ausnahme leiden, sobald auch unter den Elementen mehrere identische vorkommen; die niedrigste Permutationsform, welche sich aus den Elementen 1211322434 bilden läßt, wird 1112223344 seyn.

Will man nun, um eine Form zu erhöhen, eine gewisse Stelle mit einem

höheren Elemente besetzen, als in ihr steht, so muß dieses durch **Vertauschung** geschehen, indem man aus einer andern Stelle ein höheres Element herausnimmt, um es der zu erhöhenden Stelle zu geben, und das aus ihr genommene in jene leere Stelle wieder zu setzen. Den Stoff zu dieser Erhöhung können nun aber die Elemente, welche in den vor der zu erhöhenden Stelle befindlichen Stellen stehen, nicht darbieten, denn alsdann würde durch die Vertauschung in eine frühere Stelle, als die zu erhöhende ein niedrigeres Element gesetzt, die Form also nicht erhöhet, sondern erniedrigt werden. **Die Elemente, welche man zur Erhöhung einer Stelle gebrauchen will, müssen in späteren Stellen stehen.** Befindet sich hinter einer Stelle noch wenigstens ein höheres Element, als das, welches in ihr stehet, so kann man jedesmal dieses höhere Element mit jenem niedrigeren vertauschen, und man wird eine Form erhalten haben, welche, mit jener, woraus sie entstand, in allen frühern Stellen übereinstimmend, in der nächsthöhern ein höheres Element besitzt, also höher ist, als sie. **Jede Stelle also, auf die ein höheres Element folgt, als das ist, welches in ihr stehet, ist erhöhbar.**

Um also von irgend einer Form die nächsthöhere abzuleiten, sucht man die späteste erhöhbare Stelle derselben auf, erhöhet sie so wenig, als möglich, d. h. setzt das am wenigsten höhere Element, welches sich in den folgenden Stellen findet, hinein, und füllt die folgenden Stellen so niedrig, als möglich aus, d. h. ordnet die folgenden Elemente so, als ob man aus ihnen die niedrigste Form bilden wollte. (Einleitung §. 4.)

Es wird also z. B. die nächsthöhere Form von 12453, 12534 seyn, denn die dritte Stelle, worin ein viertes Element stand, war die späteste, nach welcher ein höheres Element folgte; das einzig höhere der folgenden Elemente war aber 5, man setzte dieses in die dritte Stelle, und füllte der Regel gemäß die beiden folgenden Stellen mit den beiden noch übrigen Elementen 3, 4 so aus, daß auf ein höheres nie ein niedrigeres folgte, so entstand die nächsthöhere Form 12534. Von dieser wird, da die vorletzte Stelle erhöhbar ist, 12543, von dieser 13245 die nächsthöhere seyn u. s. w. Die Regel kann keine Ausnahme erleiden, wenn auch unter den Elementen solche vorkommen, welche identisch sind, z. B. von 112334 ist 112343, von dieser 112433, von dieser 113234 die nächsthöhere u. s. f. Man wird also nun im

Stande seyn, jede beliebige Menge von Elementen zu permutiren, indem man zuerst die niedrigste Form bildet, und aus ihr successiv die höheren bis zur höchsten ableitet. In der höchsten Form darf, da keine Stelle mehr erhöhbar seyn kann, nie auf ein niedrigeres Element ein höheres folgen, d. h. sie muß die Elemente in natürlicher aber umgekehrter Ordnung enthalten, während die niedrigste Form alle Elemente in natürlicher Folge aber vom niedrigsten bis zum höchsten aufsteigend in sich begreift. Sollen z. B. die Elemente 1235764 permutirt werden, so ist 1234567 die niedrigste, 7654321 die höchste Form; eben so ist die niedrigste Permutationsform aus den Elementen 11232243, 11222334, während 43322211 die höchste ist. Der Inbegriff aller Permutationsformen der Elemente 1, 2, 3 ist z. B. folgender:

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321 = \mathrm{P}[1..3]$$

Die Permutationsformen von 4 verschiedenen Elementen 1, 2, 3, 4, sind ferner folgende:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}[1..4] = \ & 1234,\ 1243,\ 1324,\ 1342,\\ & 1423,\ 1432,\ 2134,\ 2143,\\ & 2314,\ 2341,\ 2413,\ 2431,\\ & 3124,\ 3142,\ 3214,\ 3241,\\ & 3412,\ 3421,\ 4123,\ 4132,\\ & 4213,\ 4231,\ 4312,\ 4321.\end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}[1..5] = \ & 12345,\ 12354,\ 12435,\ 12453,\\ & 12534,\ 12543,\ 13245,\ 13254,\\ & 13425,\ 13452,\ 13524,\ 13542,\\ & 14235,\ 14253,\ 14325,\ 14352,\\ & 14523,\ 14532,\ 15234,\ 15243,\\ & 15324,\ 15342,\ 15423,\ 15432,\\ & 21345,\ 21354,\ \ldots\ldots\ 54321.\end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}[11233] = \ & 11233,\ 11323,\ 11332,\ 12133,\\ & 12313,\ 12331,\ 13123,\ 13132,\end{aligned}$$

13213, 13231, 13312, 13321,
21133, 21313, 21331, 23113,
23131, 23311, 31123, 31132,
31213, 31231, 31312, 31321,
32113, 32131, 32311, 33112,
33121, 33211.

Ferner:

$P[1223]$ = 1223, 1232, 1322, 2123,
2132, 2213, 2231, 2312,
2321, 3122, 3212, 3221.

Hat man aus gewissen gegebenen Elementen, gleichviel, ob darunter gleiche vorkommen, oder ob sie alle von einander verschieden sind, alle Permutationsformen gebildet, oder jede mögliche Folge, worin sie treten können, dargestellt, so müssen diese folgeverschiedenen Formen, wenn man sie rückwärts liest, auch verschiedene Folgen darbieten, denn nur dieselben Formen können, wenn man sie rückwärts liest, auch da dieselbe Folge haben. Liest man also alle Formen, an Zahl = N, die sich aus gegebenen Elementen erzeugen können, rückwärts, oder drehet man sie sämmtlich um, um sie dann wie gewöhnlich zu lesen, so wird man N folgeverschiedene Formen lesen, die sich aus jenen gegebenen Elementen erzeugt haben, und da sich aus diesen nur N Permutationsformen erzeugen lassen, so folgt, daß man sie alle gelesen habe, und daß in jedem Inbegriffe aller möglichen Permutationsformen aus gegebenen Elementen einer jeden Form noch eine andere correspondiren werde, welche, wenn man sie rückwärts liest, dieselbe ist. Hat man jeder Form aus $P[1..n]$ ein rtes Element vorgesetzt, welches man durch $r.P[1..n]$ bezeichnet, und liest alle diese Formen rückwärts, so hat man $P[1..n].r$ gelesen u. s. w.

§. 10.

Recurrirendes Verfahren.

Durch eine genauere Betrachtung des independenten Verfahrens leitet sich sogleich eine recurrirende Regel ab.

Die niedrigste Form besitzt das niedrigste Element in der ersten Stelle; gedenkt man sich dieses weg, so wird man eine Permutationsform haben, die aus den übrigen Elementen gebildet ist, und zwar, da in ihr alle Stellen von der ersten an, bis zur höchsten successiv so niedrig, als möglich, besetzt sind, die niedrigste, welche man aus diesen Elementen darstellen kann. (§. 4.) Man erhöhete nun jene erste Form successiv nach den Regeln des Permutirens, bis alle Stellen, außer der ersten, so hoch, als möglich besetzt waren, d. h. bis in ihnen nirgends auf ein niedrigeres Element ein höheres folgte, worauf man auch die erste, bis dahin unverändert gebliebene Stelle angriff, um ihr das nächsthöhere Element zu ertheilen. Die erste Ordnung, oder der Inbegriff der Permutationsformen, welche das niedrigste Element in der ersten Stelle besitzen, ist also nichts, als der Inbegriff aller Permutationsformen, welche sich aus den gegebenen Elementen außer dem niedrigsten bilden lassen, welchen aber dieses niedrigste Element vorgesetzt ist. Indem man nun bei der independenten Erzeugung zur zweiten Ordnung überging, also die erste Stelle mit einem zweiten Elemente erhöhete, besetzte man die folgenden Stellen successiv so niedrig, als möglich, d. h. ordnete die übrigen Elemente so aneinander, daß nie ein niedrigeres auf ein höheres folgte, man bildete also, um die niedrigste Form der zweiten Ordnung zu erhalten, die niedrigste Form, die sich aus den gegebenen Elementen, außer dem zweiten, erzeugen ließ, und setzte ihr das zweite Element vor. Darauf erhöhete man alle diese folgenden Stellen so lange, bis sie so hoch, als möglich, besetzt waren, d. h. bis in ihnen auf ein niedrigeres Element niemals ein höheres folgte, ehe man zur Erhöhung der ersten Stelle übergehen konnte. So bildete man also, um die zweite Ordnung zu erhalten, alle Permutationsformen, welche sich aus den gegebenen Elementen, außer dem zweiten, erzeugen lassen, und setzte allen diesen Formen das zweite Element selbst vor. Allgemein, wollte man von der nten Ordnung zur $n+1$ten übergehen, d. h. beabsichtigte man, aus der höchsten Form der nten Ordnung die niedrigste der $n+1$ten, welche ihre nächsthöhere ist, abzuleiten, so setzte man in die erste Stelle das $n+1$te Element und füllte alle folgenden successiv so niedrig aus, als möglich, man erhöhete darauf alle diese folgenden Stellen nach und nach, bis in ihnen nie ein höheres Element mehr auf ein niedrigeres folgte, und hatte damit die höchste Form der $n+1$ten Ordnung, denn die nächsthöhere Form würde schon wieder in der ersten Stelle eerhöht

werden müssen. Es ist also allgemein die $n+1$te Ordnung nichts, als der Inbegriff aller Permutationsformen, welche sich aus den gegebenen Elementen, außer dem $n+1$ten, erzeugen lassen, welchen aber das $n+1$te Element vorgesetzt ist. Sind n verschiedene Elemente vorhanden, so werden n Ordnungen hervorgehen müssen, und man hat, wenn allgemein $P\left[\frac{1..n}{r}\right]$ den Inbegriff aller Permutationsformen andeutet, welche sich aus den Elementen $1, 2, 3 \ldots n$, unter denen aber das $r$te fehlt, erzeugen lassen, folgende recurrirende Regel zur Bildung der Permutationsformen in Zeichen ausgedrückt:

$$P[1..n] = 1.P\left[\frac{1..n}{1}\right] + 2.P\left[\frac{1..n}{2}\right] + 3P\left[\frac{1..n}{3}\right] + \ldots + rP\left[\frac{1..n}{r}\right] \ldots + nP\left[\frac{1..n}{n}\right]$$

Danach ist z. B.

$$P[1,2,3] = 1.P[2,3] + 2P[1,3] + 3P[1,2]$$

$$= \begin{cases} 1.P[2,3] = 123,\ 132 \\ +\ 2.P[1,3] = 213,\ 231 \\ +\ 3.P[1,2] = 312,\ 321. \end{cases}$$

Eben so ist:

$$P[1,2] = 1.P[2] + 2.P[1]$$

$$= \begin{cases} 1.P[2] = 12 \\ 2.P[1] = 21 \end{cases}$$

Ferner ist:

$$P[1..4] = 1.P\left[\frac{1..4}{1}\right] + 2P\left[\frac{1..4}{2}\right] + 3P\left[\frac{1..4}{3}\right] + 4.P\left[\frac{1..4}{4}\right]$$

$$= \begin{cases} 1.P\left[\frac{1..4}{1}\right] = 1234,\ 1243,\ 1324,\ 1342,\ 1423,\ 1432 \\ +\ 2.P\left[\frac{1..4}{2}\right] = 2134,\ 2143,\ 2314,\ 2341,\ 2413,\ 2431 \\ +\ 3.P\left[\frac{1..4}{3}\right] = 3124,\ 3142,\ 3214,\ 3241,\ 3412,\ 3421 \\ +\ 4.P\left[\frac{1..4}{4}\right] = 4123,\ 4132,\ 4213,\ 4231,\ 4312,\ 4321. \end{cases}$$

Eben so ist:

$$P[11223] = 1.P[1223] + 2P[1123] + 3P[1122]$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 1.P[1223] = \left\{ \begin{array}{llll} 11223, & 11232, & 11322, & 12123, \\ 12132, & 12213, & 12231, & 12312, \\ 12321, & 13122, & 13212, & 13221 \end{array} \right. \\ + 2.P[1123] = \left\{ \begin{array}{llll} 21123, & 21132, & 21213, & 21231, \\ 21312, & 21321, & 22113, & 22131, \\ 22311, & 23112, & 23121, & 23211 \end{array} \right. \\ + 3.P[1122] = 31122, \ 31212, \ 31221, \ 32112, \ 32121, \ 32211. \end{array} \right.$$

Ferner:

$$P[1..5] = 1.P\left[\frac{1..5}{1}\right] + 2.P\left[\frac{1..5}{2}\right] + 3.P\left[\frac{1..5}{3}\right] + 4.P\left[\frac{1..5}{4}\right] + 5.P\left[\frac{1..5}{5}\right]$$

$$\begin{array}{ll} 1.P\left[\frac{1..5}{1}\right] = & 12345, \ 12354, \ 12435, \ 12453, \\ & 12534, \ 12543, \ 13245, \ 13254, \\ & 13425, \ 13452, \ 13524, \ 13542, \\ & 14235, \ 14253, \ 14325, \ 14352, \\ & 14523, \ 14532, \ 15234, \ 15243, \\ & 15324, \ 15342, \ 15423, \ 15432 \\ + 2.P\left[\frac{1..5}{2}\right] = & 21345, \ 21354 \ \ldots\ldots \ 25431 \\ + 3.P\left[\frac{1..5}{3}\right] = & 31245, \ 31254 \ \ldots\ldots \ 35421 \\ + 4.P\left[\frac{1..5}{4}\right] = & 41235, \ 41253 \ \ldots\ldots \ 45321 \\ + 5.P\left[\frac{1..5}{5}\right] = & 51234, \ 51243 \ \ldots\ldots \ 54321 \end{array}$$

Die folgenden Formen in diesem letzten Beispiele wird der Lernende nun schon selbst bilden können.

Da die Formen $r.P[1..n]$, rückwärts gelesen, $\bar{P}[1..n]r$ darbieten, (§. 9.) so folgt, wenn man alle Theile obiger Recursionsformel rückwärts liest, daß

$$\bar{P}[1..n] = \bar{P}\left[\frac{1..n}{1}\right].1 + \bar{P}\left[\frac{1..n}{2}\right].2 \ldots + \bar{P}\left[\frac{1..n}{r}\right].r \ldots + \bar{P}\left[\frac{1..n}{n}\right].n$$

eine Recursionsformel, welche lehrt, durch Nachsetzen der Elemente an schon gebildete Formen folgende Klassen zu erzeugen.

z. B.

$$P[1..3] = P[2,3].1 + P[1,3].2 + P[1,2].3$$

$$= \begin{cases} P[2,3].1 = 23.1,\ \ 32.1 \\ P[1,3].2 = 13.2,\ \ 31.2, \\ P[1,2].3 = 12.3,\ \ 21.3, \end{cases}$$

$$P[1..4] = P\left[\frac{1..4}{1}\right].1 + P\left[\frac{1..4}{2}\right].2 + P\left[\frac{1..4}{3}\right].3 + P\left[\frac{1..4}{4}\right].4$$

$$= \begin{cases} P\left[\frac{1..4}{1}\right].1 = 234.1,\ 243.1,\ 324.1,\ 342.1,\ 423.1,\ 432.1, \\ P\left[\frac{1..4}{2}\right].2 = 134.2,\ 143.2,\ 314.2;\ 341.2,\ 413.2,\ 431.2, \\ P\left[\frac{1..4}{3}\right].3 = 124.3,\ 142.3,\ 214.3,\ 241.3,\ 412.3,\ 421.3, \\ P\left[\frac{1..4}{4}\right].5 = 123.4,\ 132.4,\ 213.4,\ 231.4,\ 312.4,\ 321.4. \end{cases}$$

§. 11.

Von der independenten Erzeugung einzelner Ordnungen.

Aus dem recurrirenden Verfahren sehen wir, daß die rte Ordnung von $P[1..n]$, $= r.P\left[\frac{1..n}{r}\right]$ ist. Bei der independenten Darstellung von $P[1..n]$ leiteten wir jede höhere Ordnung successiv aus der vorhergehenden ab, verfuhren also recurrirend, während wir jetzt in $r.P\left[\frac{1..n}{r}\right]$ die independente Regel zur Bildung einer jeden Ordnung von $P[1..n]$ haben.

z. B. die dritte Ordnung von $P[1..4]$ ist $= 3.P\left[\frac{1..4}{3}\right] = 3.P[1,2,4]$

$= 3.124,\ 3.142,\ 3.214,\ 3.241,\ 3.412,\ 3.421,$

Die vierte Ordnung von $P[1..5]$ ist $= 4.P\left[\frac{1..5}{4}\right]$

$= 4.1235,\ 4.1253,\ 4.1325,\ 4.1352,$
$4.1523,\ 4.1532,\ 4.2135,\ 4.2153,$
$4.2315.\ 4.2351,\ 4.2513,\ 4.2531,$
$4.3125,\ 4.3152,\ 4.3215,\ 4.3251,$

4.3512, 4.3521, 4.5123, 4.5132,
4.5213, 4.5231, 4.5312, 4.5321.

Eben so kann man der Foderung, alle Formen aus $P[1..n]$ independent zu bestimmen, welche das rte Element in der letzten Stelle besitzen, ein Genüge leisten, denn man hat dafür den independenten Ausdruck $P\left[\frac{1..n}{r}\right].r$

Z. B. Alle Formen aus $P[1..4]$ welche das zweite Element in der letzten Stelle besitzen, sind $= P\left[\frac{1..4}{2}\right].2$

$= 134.2,\ 143.2,\ 314.2,\ 341.2,\ 413.2,\ 431.2.$

§. 12.

Von der Anzahl der möglichen Permutationsformen.

Es ist nun leicht, ohne die Operation des Permutirens wirklich zu vollziehen, die Anzahl aller Formen, welche aus der Operation hervorgehen müssen, vorher zu berechnen. Bezeichnet man die Anzahl aller Permutationsformen, die sich aus n verschiedenen Elementen bilden lassen, durch das Zeichen $S.P[1..n]$, so wird man, da

$$P[1..n] = 1.P\left[\frac{1..n}{1}\right] + 2.P\left[\frac{1..n}{2}\right] \ldots + rP\left[\frac{1..n}{r}\right] \ldots nP\left[\frac{1..n}{n}\right]$$

ist, und jedes Glied dieser Recursionsformel, deren überhaupt n vorhanden sind, den Inbegriff der Permutationsformen anzeigt, die sich aus $n-1$ verschiedenen Elementen erzeugen, folgende Beziehung haben:

$$S.P[1..n] = n.S.P[1..(n-1)],$$

eine Recursionsformel zur Berechnung der Anzahl aller möglichen Permutationsformen, die sich aus n verschiedenen Elementen erzeugen lassen. Die Regel, welche sie ausspricht, lautet so: um die Anzahl aller Permutationsformen aus einer gegebenen Menge wirklich verschiedener Elemente zu erfahren, muß man die Anzahl der Formen, welche sich aus der um eins geringeren Menge der Elemente bilden lassen, mit der Zahl multipliciren, welche mit der Anzahl der gegebenen Elemente übereinkommt. Da nun aber **ein** Element sich nicht weiter versetzen läßt, und also auch nur **eine** Form darbietet, so ist die Anzahl aller Formen aus 2 Elementen $= 1.2$, die der

Formen, welche sich aus 3 Elementen erzeugen lassen, $= 1.2.3$ und also allgemein, die Anzahl aller Formen, welche durch Permutation von n verschiedenen Elementen entstehen, $= 1.2.3\ldots.n$.

Die Anzahl der durch Versetzung hervorgehenden Formen heißt die Permutations- oder Versetzungszahl, (numerus permutationis) welche man sehr bequem durch das Zeichen p, über welches man die Anzahl der successiven Factoren setzt, andeuten kann, so, daß allgemein:

$$SP[1..n] = 1.2.3\ldots n. = \overset{n}{p}.$$

Hätte man eine gewisse Anzahl, n, Elemente, wovon r gewisse einmal eingenommene Stellen behalten, während die übrigen, $n-r$, unter einander verwechselt werden, so ist klar, daß die Anzahl aller möglichen Complexionen, da nur $n-r$ Stellen vorhanden sind, mit denen eben so viel verschiedene Elemente wechseln sollen, $= 1.2.3\ldots(n-r)$ seyn muß.

Hat man nun aus n Elementen, unter denen sich r identische befinden, wobei die übrigen aber alle verschieden von einander sind, alle Permutationscomplexionen gebildet, so müßten in jeder derselben, wenn man sich die r gleichen Elemente als verschieden von einander denken wollte, diese noch unter sich versetzt werden, falls man alle Complexionen aus den jetzt sämmtlich verschiedenen Elementen erhalten wollte. Fingirt man daher die Anzahl der Formen, welche aus n Elementen, unter denen sich r identische befinden, hervorgehen, indem man sie $= N$ setzt, und gedenkt man sich jene r Elemente jetzt als verschieden, so werden aus jeder der N Formen $1.2.3..r$ neue entstehen, und die sämtlich hervorgehenden Formen werden alsdann $= 1.2.3..r.N$ seyn, in welchem Falle man aber n gänzlich von einander verschiedene Elemente hätte, deren Permutationszahl $= 1.2.3\ldots n$ ist, man hat daher

$$1.2.3\ldots r.N = 1.2.3\ldots n \text{ also}$$

$$N = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots r} = \frac{\overset{n}{p}}{\overset{r}{p}}$$

Befinden sich nun also außer diesen r gleichen Elementen noch m identische einer andern Art unter den n gegebenen, so findet man ihre Anzahl durch dieselben Schlüsse

$$= \frac{1 . 2 . 3 \ldots n}{1 . 2 \ldots r . 1 . 2 \ldots m} = \frac{\overset{n}{P}}{\overset{r}{P} . \overset{m}{P}}.$$

u. s. w.

Sind n Elemente gegeben, unter denen sich r gleiche befinden, wobei aber die übrigen n—r auch unter sich identisch sind, so ist die Anzahl aller möglichen Formen, welche durch Versetzung aus ihnen hervorgehen können,

$$= \frac{1 . 2 . 3 \ldots . n}{1 . 2 \ldots r . 1 . 2 \ldots (n-r)}$$

$$= \frac{n . (n-1) . (n-2) \ldots (n-(r-1)) . (n-r) \ldots 1}{r . (r-1) \ldots 1 . (n-r) . (n-r-1) \ldots 1}$$

$$= \frac{n . (n-1) . (n-2) \ldots (n-(r-1))}{r . (r-1) \ldots . 1} = \frac{\overset{n}{P}}{\overset{r}{P} . \overset{n-r}{P}}$$

Für Zahlen dieser Art hat die Analysis, ihrer Wichtigkeit und ihres öfteren Gebrauchs wegen ein einfaches Zeichen eingeführt, dessen Ursprung jedoch erst beim Studium derselben klar werden kann. Es wird nämlich allgemein der Ausdruck $\frac{n . (n-1) . (n-2) \ldots (n-(r-1))}{r . (r-1) \ldots 1}$ durch das Zeichen ${}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}}$ angedeutet. Die merkwürdigen Beziehungen unter diesen Zahlen, (Binomialcoefficienten, figurirte Zahlen) gehören in die Analysis.

Kapitel II.

Vom Combiniren.

§. 13.

Vom Combiniren im Allgemeinen.

Soll es, bei einer Reihe von Elementen, noch eine zweite combinatorische Operation geben, so ist nothwendigerweise erfoderlich, daß die Complexionen nicht alle die nemlichen Elemente enthalten, denn in diesem Falle kann Verschiedenheit der

Formen nur in der stets geänderten Folge bestehen, also durch Permutation hervorgebracht werden. Combiniren heißt, aus einer gegebenen Anzahl von Elementen jedesmal eine bestimmte Menge hervorheben, so, daß das einemal nicht schlechterdings die nemlichen Elemente zum Vorschein kommen, als das anderemal, und daß auf diese Weise alle möglichen so entstehenden Formen erzeugt werden.

Hebt man aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5 die Elemente 135 das einemal, 513 das anderemal hervor, so werden diese Formen der Definition der Operation gemäß nicht als verschieden angesehen werden können, denn beide enthalten die nemlichen Elemente. Aenderung der Folge der Elemente bringt keine Verschiedenheit der Formen hervor. Da es nun also gleich ist, welche Folge die Elemente beobachten, so scheint es beim ersten Anblicke schwer zu seyn, höhere Formen von niedrigeren zu unterscheiden, ja, man könnte auf die Vermuthung gerathen, die lexicographische Anordnung hier nicht anwenden zu können; denn hat man z. B. die beiden wirklich verschiedenen Combinationsformen 125 und 134 hervorgehoben, so wird man die letztere freilich höher nennen, als die ersten, verändert man jedoch diese, indem man das 5te Element in die zweite oder erste Stelle setzt, wodurch die Form der Definition gemäß dieselbe bleibt, so wird das Urtheil gerade entgegengesetzt ausfallen. Jedoch erhellet auf den ersten Blick, da nur die verschiedene Folge, in welche die Elemente einer Combinationscomplexion treten können, verhindert, sich der lexicographischen Anordnung unmittelbar zu bedienen, daß es nur nöthig sey, irgend eine Folge der Elemente beliebig, aber darauf unabänderlich beibehaltend anzunehmen, um dieses Hinderniß aus dem Wege zu räumen.

Die Frage, welche Folge der Elemente die einfachste ist, beantwortet sich leicht. Von allen Permutationsformen kann man die niedrigste oder die höchste, wenn es darauf ankommt, sie für sich zu bilden, am leichtesten erzeugen, und da es immer leichter ist, hinauf, als hinunter zu zählen, so hat man die Annahme gemacht, daß jede Combinationsform von allen Versetzungen, die sie gestattet, in der niedrigsten erscheinen, d. h. daß in ihr nie auf ein höheres Element ein niedrigeres folgen solle. Jetzt ist es also leicht, höhere und niedrigere Combinationscomplexionen von einander zu unterscheiden; eine Form, die ein erstes, zweites und fünftes

Element enthält, wird niedriger seyn, als solche, welche ein zweites, drittes und viertes Element in sich begreift, denn die erste wird nach obiger Annahme so: 125, die andere so: 234 geschrieben.

Was nun das Bilden der Formen selbst betrifft, so ist es gestattet, drei verschiedene Voraussetzungen zu machen, entweder die Elemente dürfen sich nicht wiederholen, d. h. es darf in einer Complexion jedes Element nur einmal vorkommen (Combinationen bei verbotener Wiederholbarkeit) oder das Wiederholen der Elemente ist unbedingt gestattet, d. h. man darf jedes Element so oft setzen, als es die Klasse erlaubt, (Combinationen bei unbedingter Wiederholbarkeit) oder endlich, die Wiederholung ist bedingt gestattet, d. h. es ist bei jedem Elemente besonders angegeben, wie oft es sich höchstens wiederholen läßt. (Combinationen bei bedingter Wiederholbarkeit.) Die beiden ersten Fälle sind die bei weitem wichtigeren.

Abstrahirt man von der Summe, welche die Elemente jeder Form darbieten, so heißt die Operation Combiniren überhaupt, Combiniren an sich, siehet man hingegen auf jene Summe, so nennt man die Operation Combiniren zu bestimmten Summen.

I. Vom Combiniren an sich.

A. Bei verbotener Wiederholbarkeit.

§. 14.

Independentes Verfahren.

Die niedrigste Form ergiebt sich, indem man die Stellen successiv so niedrig, als möglich besetzt (§. 4). Die niedrigste Form, welche sich aus den Elementen: 1, 2, 3, 4, 5. zur Klasse 3 bilden läßt, ist 123, man setzt in die erste Stelle das erste, in die zweite das zweite Element u. s. w. bis die Klasse erreicht ist. Um aus einer Combinationsform die nächsthöhere abzuleiten, haben wir die allgemeine Regel, (§. 4) und es kömmt hier nur noch darauf an, zu zeigen, welche Stelle überhaupt erhöhbar ist.

Hat man eine Stelle erhöhet, so müssen die folgenden Stellen nach der Regel im 4ten §. so niedrig, als es die Operation erlaubt, besetzt werden; dieses Besetzen muß aber nach der Annahme im vorigen §. unfehlbar so geschehen, daß dadurch in der Form nie ein niedrigeres Element auf ein höheres folgt, d. h. die folgenden Elemente müssen alle höher seyn, als das, womit jene Stelle erhöhet wurde, sollen also bei dieser Bedingung die folgenden Stellen so niedrig, als möglich ausgefüllt werden, so setzt man offenbar in die nächstfolgende Stelle das nächsthöhere, in die darauf folgende wieder das nächsthöhere von jenem Elemente, u. s. f. bis alle folgenden Stellen ausgefüllt sind. Soll also überhaupt eine Stelle erhöhbar seyn, so ist, die letzte Stelle ausgenommen, nicht allein erfoderlich, daß es noch ein höheres Element gebe, als das, welches in ihr stehet, sondern, daß auch noch so viele successiv höhere vorhanden sind, als nachfolgende Stellen deren fodern. Hat man z. B. aus den Elementen 1,2,3,..6 die Form 1235 erzeugt, so kann jede Stelle derselben erhöhet werden, denn man wird im Stande seyn, die nachfolgenden Stellen successiv noch höher zu besetzen. Hatte man aber aus denselben Elementen die Form 1456 gebildet, so könnte die letzte Stelle nicht höher besetzt werden, weil es kein höheres Element giebt, als das, womit sie besetzt ist, die dritte Stelle würde erhöhet werden können, falls sich dann noch ein höheres Element vorfände, womit man die letzte Stelle ausfüllen könnte; eben so ist es mit der zweiten Stelle, sie würde mit einem fünften Elemente erhöhet werden können, wenn man die beiden letzten Stellen höher auszufüllen im Stande wäre, d. h. wenn sich ein siebentes Element unter den gegebenen befände. Die einzig erhöhbare Stelle ist die erste, denn wenn in sie ein zweites Element gesetzt wird, ist man im Stande, die zweite Stelle mit einem dritten, die dritte mit einem vierten und die letzte mit einem fünften Elemente auszufüllen. Nachdem aber dieses geschehen ist, so kann in der entstandenen Form 2345, sogleich die letzte Stelle erhöhet werden, indem man ein sechstes Element hineinsetzt u. s. w.

Es ist nun also leicht, alle Combinationsformen auf einem independenten Wege zu erzeugen. Wird z. B. gefodert $\overset{3}{C}[1..5]$ zu bilden, so ist die niedrigste Form 123, darauf wird die letzte Stelle erhöhbar seyn, welche überhaupt jedesmal das höchste Element annehmen kann, weil es keine spätere Stellen giebt, welche

höhere Elemente fodern. Die zweite Stelle kann hier höchstens ein viertes Element annehmen, weil das fünfte für die letzte Stelle aufbewahrt werden muß; eben so wird die erste Stelle höchstens ein drittes Element bekommen können.

Die Complexionen sind daher folgende:

$$\overset{3}{C}'[1..5] = 123,\ 124,\ 125,\ 134,\ 135,\ 145,\ 234,\ 235,\ 245,\ 345.$$

Ferner ist:

$$\overset{3}{C}'[1..6] = 123,\ 124,\ 125,\ 126,\ 134,\ 135,\ 136,\ 145,\ 146,\ 156,\ 234,\ 235,\ 236,\ 245,\ 246,\ 256,\ 345,\ 346,\ 356,\ 456.$$

Ferner:

$$\overset{4}{C}'[1..6] = 1234,\ 1235,\ 1236,\ 1245,\ 1246,\ 1256,\ 1345,\ 1346,\ 1356,\ 1456,\ 2345,\ 2346,\ 2356,\ 2456,\ 3456.$$

$$\overset{2}{C}'[1..5] = 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 23,\ 24,\ 25,\ 34,\ 35,\ 45.$$

$$\overset{5}{C}[1..8] = 12345,\ 12346,\ 12347,\ 12348,\ 12356,\ 12357,\ 12358,\ 12367,\ 12368,\ 12378,\ 12456,\ 12457,\ 12458,\ 12467,\ 12468,\ 12478,\ 12567,\ 12568,\ 12578,\ 12678,\ 13456,\ 13457,\ 13458,\ 13467,\ 13468,\ 13478,\ 13567,\ 13568,\ 13578,\ 13678,\ 14567,\ 14568$$

14578, 14678, 15678, 23456
23457, 23458, 23467, 23468
23478, 23567, 23568, 23578
23678, 24567, 24568, 24578
24678, 25678, 34567, 34568
34578, 34678, 35678, 45678.

$\overset{1}{C}'[1..6] = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

$\overset{6}{C}'[1..6] = 123456.$

Wenn man alle Combinationsformen, die aus gewissen Elementen möglich sind, rückwärts liest, so wird man offenbar gleichfalls alle Formen gelesen haben, welche dem Inhalte nach verschieden, aus jenen Elementen gebildet werden können. Da aber in den Combinationsformen auf ein höheres Element nie ein niedrigeres folgt, so wird man, beim Rückwärtslesen der Formen die umgekehrte Ordnung antreffen, es wird in ihnen auf ein niedrigeres Element nie ein höheres folgen, sie werden aus den gegebenen Elementen 1.2..n gebildet erscheinen, von denen man das höchste, n, als niedrigstes, das erste als höchstes betrachtet hat. Liest man also die Formen $\overset{k}{C}'[1..n]$ rückwärts, so wird man $\overset{k}{C}'[n..1]$ lesen, ist ferner den durch $\overset{k}{C}'[1..n]$ angedeuteten Formen ein Element, r, vorgesetzt, $r.\overset{k}{C}'[1..n]$, so wird man beim Rückwärtslesen $\overset{k}{C}'[n..1]r$ gelesen haben u. s. f.

§. 15.

Recurrirendes Verfahren.

Um den Uebergang von der independenten Bestimmung zur recurrirenden zu machen, ist es nöthig, das Verfahren bei der ersten genauer zu erwägen.

Die niedrigste Form enthielt die successiv niedrigsten Elemente, vom ersten an ununterbrochen fort, bis zu demjenigen, welches mit dem Klassen-Exponenten gleichviel Einheiten in sich schloß. Gedenkt man sich von dieser niedrigsten Form das erste

Element weg, so bleibt eine Form der nächstniedrigeren Klasse übrig, welche die niedrigsten Elemente außer dem ersten, 2, 3, 4.., in successiver Folge enthält, d. h. die niedrigste Form der nächstniedrigeren Klasse aus den anfänglich gegebenen Elementen, in denen aber das niedrigste nicht mehr vorkam. Nachdem man nun die niedrigste Form gebildet hatte, erhöhete man sie nach und nach, wobei man, ehe die erste, mit dem niedrigsten Elemente besetzte Stelle zur Erhöhung gezogen wurde, alle folgenden Stellen, nach und nach so hoch besetzte, als möglich, d. h. man bildete, um die niedrigste Ordnung zu erzeugen, alle Combinationsformen zur nächstniedrigeren Klasse, aus den nemlichen Elementen, außer dem niedrigsten, und setzte allen diesen Formen jenes niedrigste Element vor. In der Operation weiter fortgehend, erhöhete man nun auch die erste Stelle der Form, indem man ihr ein zweites Element gab, und die übrigen Stellen mit successiv höheren Elementen besetzte, wodurch nach §. 4. die niedrigste Form hervorgebracht wurde, welche sich zur anfänglich gefoderten Klasse, und aus den gegebenen Elementen außer dem ersten bilden ließ. Diese Form erhöhete man nun successiv, bis keine Stelle mehr erhöhbar, d. h. bis die anfänglich zu vollziehen gefoderte Operation geschlossen war. Wird also allgemein $\overset{k}{C}'[1..n]$ gefodert, so ist die erste Ordnung dieser Klasse $= 1.\overset{k-1}{C}'[2..n]$, und der Inbegriff aller übrigen Formen wird $= \overset{k}{C}'[2..n]$ seyn. Man hat also folgende partielle Recursionsformel:

$$\overset{k}{C}'[1..n] = 1.\overset{k-1}{C}'[2..n] + \overset{k}{C}'[2..n]$$

Diese Regel kann man nun auch auf den zweiten Theil des Ausdrucks $\overset{k}{C}'[2..n]$ anwenden, und man hat:

$$\overset{k}{C}'[2..n] = 2.\overset{k-1}{C}'[3..n] + \overset{k}{C}'[3..n]$$

substituirt man diesen Werth in den ersten Ausdruck, so ist:

$$\overset{k}{C}'[1..n] = 1\overset{k-1}{C}'[2..n] + 2\overset{k-1}{C}'[3..n] + \overset{k}{C}'[3..n],$$

wobei es gestattet ist, den letzten Theil wieder eben so zu discerpiren u. s. f. Der

letzte Ausdruck wird immer wieder eine kte Klasse seyn, welche durch Discerption jedesmal in zwei Theile zerfällt, von denen der letzte wieder eine kte Klasse anzeigt. Man sey allgemein nach r solcher Zertheilungen auf

$$\overset{k}{C}'[1..n] = 1.\overset{k-1}{C}'[2..n] + 2.\overset{k-1}{C}'[3..n]\ldots + r.\overset{k-1}{C}'[(r+1)..n] + \overset{k}{C}'[(r+1)..n]$$

gekommen, es soll untersucht werden, wie groß r höchstens werden kann. Die Anzahl der Elemente in jedem Gliede der Formel, woraus sich jene Klassen-Inbegriffe bilden sollen, nimmt mit jedem Gliede um eins ab, es ist aber erfoderlich, daß dieser Elemente nicht weniger werden, als die Klasse, wenn der Ausdruck nicht etwas Unmögliches fodern soll. Ist also die Anzahl der Elemente noch so groß, als die Klasse, so ist der Ausdruck noch reel, sobald die Klasse größer wird, imaginär. Die Anzahl der Elemente in dem Ausdrucke $r.\overset{k-1}{C}'[(r+1)..n]$, ist aber $n-r$, ist dieses $= k-1$, so ist $r\overset{k-1}{C}[(r+1)..n]$ das letzte Glied, welches möglich ist, denn alsdann ist k, der Klassen-Exponent des Ergänzungsgliedes $\overset{k}{C}'[(r+1)..n]$ größer, als $n-r$. Ist aber $n-r = k-1$, so ist $r = n-k+1$, folglich ist das letzte Glied der Recursionsformel $= (n-k+1).\overset{k-1}{C}'[(n-k+2)..n]$ und sie selbst wird folgendermaßen ausgedrückt:

$$\overset{k}{C}'[1..n] = 1.\overset{k-1}{C}'[2..n] + 2.\overset{k-1}{C}'[3..n]\ldots + r\overset{k-1}{C}'[(r+1)..n]\ldots + (n-k+1)\overset{k-1}{C}'[(n-k+2)..n]$$

Wird nun z. B. $\overset{4}{C}'[1..6]$ gefodert, so bildet sich diese Klasse nach jener Recursionsformel so:

$$\overset{4}{C}'[1..6] = 1.\overset{3}{C}'[2..6] + 2.\overset{3}{C}'[3..6] + 3\overset{3}{C}'[4..6]$$

$$= \left\{ \begin{array}{lll} 1.\overset{3}{C}'[2..6] & = & 1234,\ 1235,\ 1236,\ 1245 \\ & & 1246,\ 1256,\ 1345,\ 1346 \\ & & 1356,\ 1456 \\ +\ 2.\overset{3}{C}'[3..6] & = & 2345,\ 2346,\ 2356,\ 2456 \\ +\ 3.\overset{3}{C}'[4..6] & = & 3456 \end{array} \right.$$

Ferner:

$$\overset{3}{C}'[1..5] = 1\,\overset{2}{C}'[2..5] + 2.\overset{2}{C}'[3..5] + 3.\overset{2}{C}[4,5]$$

$$= \left\{ \begin{array}{lll} 1.\overset{2}{C}'[2..5] & = & 123,\ 124,\ 125,\ 134,\ 135,\ 145 \\ +\ 2.\overset{2}{C}'[3..5] & = & 234,\ 235,\ 245 \\ +\ 3.\overset{2}{C}'[4,5] & = & 345 \end{array} \right.$$

Ferner:

$$\overset{4}{C}'[1..7] = 1.\overset{3}{C}'[2..7] + 2.\overset{3}{C}'[3..7] + 3\,\overset{3}{C}'[4..7] + 4.\overset{3}{C}'[5..7]$$

$$= \left\{ \begin{array}{lll} 1.\overset{3}{C}'[2..7] & = & \left\{ \begin{array}{l} 1234,\ 1235,\ 1236,\ 1237 \\ 1245,\ 1246,\ 1247,\ 1256 \\ 1257,\ 1267,\ 1345,\ 1346 \\ 1347,\ 1356,\ 1357,\ 1367 \\ 1456,\ 1457,\ 1467,\ 1567 \end{array} \right. \\ +\ 2.\overset{3}{C}'[3..7] & = & \left\{ \begin{array}{l} 2345,\ 2346,\ 2347,\ 2356 \\ 2367,\ 2367,\ 2456,\ 2457 \\ 2467,\ 2567 \end{array} \right. \\ +\ 3.\overset{3}{C}'[4..7] & = & 3456,\ 3457,\ 3467,\ 3567 \\ +\ 4.\overset{3}{C}'[5..7] & = & 4567. \end{array} \right.$$

Man hätte aber jene partielle Recursionsformel:

$$\overset{k}{C}'[1..n] = \overset{k}{C}'[2..n] + 1.\overset{k-1}{C}'[2..n]$$

auch so in eine vollkommene umwandeln können, indem man jedesmal den Theil zerlegt, welcher die um eins niedrigere Klasse enthält, dann ist:

$$1.\overset{k-1}{C}'[2..n] = 1.\overset{k-1}{C}'[3..n] + 12.\overset{k-2}{C}'[3..n].$$

Ferner:

$$1.2.\overset{k-2}{C}'[3..n] = 1.2.\overset{k-2}{C}'[4..n] + 1.2.3\overset{k-3}{C}'[4..n]$$

Es ist also:

$$\overset{k}{C}'[1..n] = \overset{k}{C}[2..n] + 1.\overset{k-1}{C}'[3..n] + 1.2.\overset{k-2}{C}'[4..n] + 1.2.3\overset{k-3}{C}'[4..n]$$

Es soll nun ganz allgemein untersucht werden, wie weit die Discerption fortgeführt werden kann. Man wird nach r Discerptionen, wenn man jedesmal den Theil zerlegt hat, welcher die niedrigere Klasse enthielt, auf

$$12..r.\overset{k-r}{C}'[(r+2)..n] + 1.2..(r+1).\overset{k-(r+1)}{C}'[(r+2)..n]$$

gekommen seyn, ist hier nun $k = r + 1$ oder $r = k - 1$, so ist der Ausdruck:

$$12..(k-1)\overset{1}{C}'[(k+1)..n] + 12..k.\overset{0}{C}'[(k+1)..n]$$

Ein Zeichen, wie $\overset{0}{C}$ u. s. w. bedeutet eigentlich nur leere Stellen, werden ihm Elemente vorgesetzt, als z. B. $123\overset{0}{C}'[1..n]$, so bedeutet er die Form, welche die vorgesetzten Elemente bilden, so ist also

$$12..k.\overset{0}{C}'[(k+1)..n] = 123..k$$

Weiter, als zur oten Klasse kann man nicht discerpiren, und man wird die Totalrecursionsformel folgendermaßen ausdrücken:

$$\overset{k}{C}'[1..n] = \overset{k}{C}'[2..n] + 1.\overset{k-1}{C}'[3..n] + 12.\overset{k-2}{C}'[4..n]...$$

$$+ 1..r\overset{k-r}{C}[(r+2)..n] \ldots 1..k.\overset{0}{C}[(k+1)..n]$$

So ist z. B.

$$\overset{5}{C}'[1..4] = \overset{5}{C}'[2..4] + 1.\overset{2}{C}'[3,4] + 12.\overset{1}{C}'[4] + 123\,\overset{0}{C}'$$

$$= \begin{cases} \overset{5}{C}'[2..4] = 234. \\ +\,1.\overset{2}{C}'[3..4] = 1.34 \\ +\,12.\overset{1}{C}'[4] = 12.4 \\ +\,123\,\overset{0}{C}' = 123. \end{cases}$$

Ferner:

$$\overset{4}{C}'[1..6] = \overset{4}{C}'[2..6] + 1.\overset{3}{C}'[3..6] + 12.\overset{2}{C}'[4..6] + 123.\overset{1}{C}'[5,6] + 1234.\overset{0}{C}'$$

$$= \begin{cases} \overset{4}{C}'[2..6] = 2345,\ 2346,\ 2356,\ 2456,\ 3456 \\ +\,1.\overset{3}{C}'[3..6] = 1.345,\ 1.346,\ 1.356,\ 1.456 \\ +\,1.2\,\overset{2}{C}'[4..6] = 12.45,\ 12.46,\ 12.56 \\ +\,123.\overset{1}{C}'[5,6] = 123.5,\ 123.6 \\ +\,1234.\overset{0}{C}'[6] = 1234 \end{cases}$$

Ferner:

$$\overset{3}{C}`[1..7] = \overset{3}{C}[2..7] + 1.\overset{2}{C}`[3..7] + 12.\overset{1}{C}`[4..7] + 123.\overset{0}{C}.$$

$$= \begin{cases} \overset{3}{C}`[2..7] = \begin{cases} 234, & 235, & 236, & 237 \\ 245, & 246, & 247, & 256 \\ 257, & 267, & 345, & 346 \\ 347, & 356, & 357, & 367 \\ 456, & 457, & 467, & 567. \end{cases} \\ + 1.\overset{2}{C}`[3..7] = \begin{cases} 2.34, & 2.35, & 2.36, & 2.37 \\ 2.45, & 2.46, & 2.47, & 2.56 \\ 2.57, & 2.67. \end{cases} \\ + 12,\overset{1}{C}`[4..7] = 12.4, \quad 12.5, \quad 12.6, \quad 12.7 \\ + 123\overset{0}{C} = 123. \end{cases}$$

Hätte man die Folge der Elemente in den Combinationsformen nicht steigend, sondern fallend angenommen, so, daß man also das höchste Element als niedrigstes, das niedrigste als höchstes betrachtet hätte, so wären beide Verfahrungs-Arten ganz dieselben geblieben, und jene ursprünglich hervorgegangene partielle Recursionsformel hätte folgende Gestalt gehabt:

$$\overset{k}{C}`[n..1] = \overset{k}{C}`[(n-1)..1] + n.\overset{k-1}{C}`[(n-1)..1]$$

Liest man aber alle diese Formen rückwärts, oder drehet man sie um, so, daß das niedrigste Element wieder als das erste, das höchste als letztes Element betrachtet wird (§. 14), so hat man offenbar:

$$\overset{k}{C}`[1..n] = \overset{k}{C}`[1..(n-1)] + \overset{k-1}{C}[1..(n-1)].n,$$

eine partielle Recursionsformel, welche lehrt, wie man durch Nachsetzen späterer Elemente höhere Klassen erzeugen kann. Auch diese Recursionsformel kann man durch

fortgesetztes Discerpiren in eine vollkommene verwandeln. Discerpirt man zuerst jedesmal den Theil, welcher dieselbe Klasse enthält, so ist zuerst:

$$\overset{k}{C}'[1..(n-1)] = \overset{k}{C}'[1..(n-2)] + \overset{k-1}{C}'[1..(n-2)].(n-1)$$

Ferner:

$$C'[1..(n-2)] = \overset{k}{C}'[1..(n-3)] + \overset{k-1}{C}'[1..(n-3)].(n-2)$$

also zunächst

$$\overset{k}{C}'[1..n] = \overset{k-1}{C}'[1..(n-1)]n + \overset{k-1}{C}'[1..(n-2)](n-1)$$
$$+ \overset{k-1}{C}'[1..(n-3)](n-2) + \overset{k}{C}'[1..(n-3)]$$

wobei der letzte Theil wieder eben so discerpirt werden kann, u. s. f.

Man sey in der Zertheilung auf:

$$\overset{k-1}{C}'[1..(n-r)](n-(r-1))$$

gekommen, so wird dieser Ausdruck, welcher aus:

$$\overset{k}{C}'[1..(n-(r-1))]$$

entstanden ist, noch den Theil:

$$\overset{k}{C}'[1...(n-r)]$$

bei sich haben. Nachdem nun endlich $n-r$ zu k, oder $r=n-k$ geworden ist, wird der letzte Theil der ganzen Recursionsformel:

$$\overset{k-1}{C}'[1..k].(k+1) + \overset{k}{C}'[1..k],$$

denn wollte man $\overset{k}{C}'[1..k]$ noch discerpiren, so entstehet:

$$\overset{k}{C}'[1..(k-1)] + \overset{k-1}{C}'[1..(k-1)].k$$

wovon der erste Theil Unmögliches fodert, der zweite aber mit $\overset{k}{C}'[1..k]$ einerlei ist. Man hat also folgende Totalrecursionsformel:

$$\overset{k}{C}'[1..n] = \overset{k-1}{C}'[1..(n-1)].n + \overset{k-1}{C}'[1..(n-2)](n-1)\ldots$$
$$+ \overset{k-1}{C}'[1..(n-r)](n-(r-1))\ldots + \overset{k-1}{C}'[1..(k-1)]\,k.$$

nach welcher sich folgende Beispiele leicht ergeben:

$$\overset{2}{C}'[1..4] = \overset{1}{C}'[1..3].4 + \overset{1}{C}'[1..2]3 + \overset{1}{C}'[1].2$$

$$= \left\{\begin{array}{lll} \overset{1}{C}'[1..3].4 & = & 1.4,\ 2.4,\ 3.4 \\ \overset{1}{C}'[1..2].3 & = & 1.3,\ 2.3 \\ \overset{1}{C}'[1].2 & = & 1.2 \end{array}\right.$$

$$\overset{3}{C}'[1..7] = \overset{2}{C}'[1..6].7 + \overset{2}{C}'[1..5]6 + \overset{2}{C}'[1..4].5 + \overset{2}{C}'[1..3].4$$
$$+ \overset{2}{C}'[1..2].3$$

$$= \left\{\begin{array}{lll} \overset{2}{C}'[1..6].7 & = & \left\{\begin{array}{l} 12.7,\ 13.7,\ 14.7,\ 15.7, \\ 16.7,\ 23.7,\ 24.7,\ 25.7, \\ 26.7,\ 34.7,\ 35.7,\ 36.7, \\ 45.7,\ 46.7,\ 56.7, \end{array}\right. \\ +\overset{2}{C}[1..5].6 & = & \left\{\begin{array}{l} 12.6,\ 13.6,\ 14.6,\ 15.6, \\ 23.6.\ 24.6,\ 25.6,\ 34.6, \\ 35.6,\ 45.6, \end{array}\right. \\ +\overset{2}{C}'[1..4].5 & = & 12.5,\ 13.5,\ 14.5,\ 23.5,\ 24.5,\ 34.5, \\ +\overset{2}{C}[1..3].4 & = & 12.4,\ 13.4,\ 23.4, \\ +\overset{2}{C}'[1,2].3 & = & 12.3, \end{array}\right.$$

$$\overset{3}{C}{}'[1..5] = \overset{2}{C}{}'[1..4].5 + \overset{2}{C}{}'[1..3].4 + \overset{2}{C}{}'[1..2].3 \ldots$$

$$= \begin{cases} + \overset{2}{C}{}'[1..4].5 = 12.5,\ 13.5,\ 14.5,\ 23.5,\ 24.5,\ 34.5, \\ + \overset{2}{C}{}'[1..3].4 = 12.4,\ 13.4,\ 23.4, \\ + \overset{2}{C}{}'[1..2].3 = 12.3 \end{cases}$$

Zerlegt man aber jedesmal den Theil der Formel:

$$\overset{k}{C}{}'[1..n] = \overset{k}{C}{}'[1..(n-1)] + \overset{k-1}{C}{}'[1..(n-1)].n,$$

welcher die nächstniedrigere Klasse anzeigt, so erhält man, da zuerst:

$$\overset{k-1}{C}{}'[1..(n-1)].n = \overset{k-1}{C}{}'[1..(n-2)]n + \overset{k-2}{C}{}'[1..(n-2)].n.(n-1)$$

darauf

$$\overset{k-2}{C}{}'[1..(n-2)]n.(n-1) = \overset{k-2}{C}{}'[1..(n-3)](n-1)n$$
$$+ \overset{k-3}{C}{}'[1..(n-3)](n-2)(n-1)n$$

ist, den Ausdruck:

$$\overset{k}{C}{}'[1..n] = \overset{k}{C}{}'[1..(n-1)] + \overset{k-1}{C}{}'[1..(n-2)].n$$
$$+ \overset{k-2}{C}{}'[1..(n-3)](n-1)n + \overset{k-3}{C}{}'[1..(n-3)](n-2)(n-1)n$$

Nach r Discerptionen wird man auf den Ausdruck:

$$\overset{k-r}{C}{}'[1..(n-(r+1))].(n-(r-1))\ldots n$$
$$+ \overset{k-(r+1)}{C}{}'[1..(n-(r+1))].(n-r)\ldots(n-1).n$$

gekommen seyn, welcher sich, wenn $k = r + 1$ oder $r = k - 1$ ist in

$$\overset{1}{C}{}'[1..(n-k)].(n-(k-2))\ldots n + \overset{0}{C}{}'[1..(n-k)](n-(k-1)\ldots n$$

verwandelt, wo der letzte Theil nur anzeigt, daß die k Elemente, n, $n-1$, $n-2$, ... $n-(k-1)$ für sich als Form gesetzt werden sollen.

Mit diesen beiden Gliedern wird also die Totalrecursionsformel geschlossen seyn, welche daher folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$\overset{k}{C'}[1..n] = \overset{k}{C'}[1..(n-1)] + \overset{k-1}{C'}[1..(n-2)]n \ldots$$
$$+ \overset{k-r}{C}[1..(n-(r+1))](n-(r-1)) \ldots (n-1)n \ldots \overset{0}{C}.n-(k-1)..(n-1)n$$

Z. B.

$$\overset{4}{C'}[1..6] = \overset{4}{C'}[1..5] + \overset{3}{C'}[1..4]6 + \overset{2}{C}[1..3]56 + \overset{1}{C}[1..2]456 + \overset{0}{C}.3456.$$

$$= \begin{cases} \overset{4}{C'}[1..5] = 1234,\ 1235,\ 1245,\ 1345,\ 2345. \\ + \overset{3}{C'}[1..4].6 = 123.6,\ 124.6,\ 134\,6,\ 234.6. \\ + \overset{2}{C'}[1..3].56 = 12.56,\ 13.56,\ 23.56, \\ + \overset{1}{C'}[1,2].4\,56 = 1.456,\ 2.456 \\ + \overset{0}{C'}.3456 = 3456 \end{cases}$$

$$\overset{2}{C'}[1..7] = \overset{2}{C'}[1..6] + \overset{1}{C'}[1..5].7 + \overset{0}{C}.67$$

$$= \begin{cases} \overset{2}{C'}[1..6] = \begin{cases} 12,\ 13,\ 14,\ 15 \\ 16,\ 23,\ 24,\ 25 \\ 26,\ 34,\ 35,\ 36 \\ 45,\ 46,\ 56 \end{cases} \\ + \overset{1}{C}[1..5].7 = 1.7,\ 2.7,\ 3.7,\ 4.7,\ 5.7 \\ + \overset{0}{C}.67 = 67 \end{cases}$$

Ehe wir zu der Voraussetzung übergehen, unter welcher die Elemente als unbedingt wiederholbar angesehen werden, wollen wir noch einige recurrirende Beziehungen zeigen, welche sich leicht aus den vorigen deduciren lassen.

Die Bezeichnung der Verknüpfung der Elemente geschiehet, wie wir früher angenommen haben, durch bloßes Aneinandersetzen der Elemente; eine Form, worin ein erstes, zweites und viertes Element befindlich ist, wurde folgendermaßen geschrieben: 124. Diese Bezeichnung ist der der Multiplication analog, und deshalb gewählt, weil bei der Anwendung der Combinationslehre auf die Analysis die Elemente, wenigstens im Allgemeinen, immer als Factoren, die Formen selbst aber als Theile betrachtet werden. Sollte einem Formen-Inbegriffe, z. B. $\overset{k}{C}'[1..n]$, d. h. jeder einzelnen Form desselben ein gewisses Element, r, vorgesetzt werden, so bezeichneten wir es durch $r.\overset{k}{C}'[1..n]$. Diese Bezeichnung beibehaltend werden wir nun auch einen Inbegriff, wie $\overset{k}{C}'[1..n]$, dessen Formen alle ein rtes Element verlieren sollen, durch $\frac{\overset{k}{C}'[1..n]}{r}$ bezeichnen, so, daß $r.\overset{k}{C}'[1..n]$ und $\frac{\overset{k}{C}'[1..n]}{r}$ widerstreitende Operation andeuten, und allgemein:

$$\overset{k}{C}'[1..n] = \frac{r.\overset{k}{C}'[1..n]}{r} \text{ ist.}$$

Wenn also: $r.\overset{k}{C}'[1..n] = \overset{k+1}{C}'[1..q]$, so ist:

$$\overset{k}{C}'[1..n] = \frac{\overset{k+1}{C}'[1..q]}{r}.$$

Demgemäß ist auch:

$$\frac{\overset{k}{C}'[1..n]}{r} \mp \overset{m}{C}'[1..q] = \frac{\overset{k}{C}'[1..n] \mp r.\overset{m}{C}'[1..q]}{r}$$

Eben so bezeichnet man mehrere identische Elemente, wenn sie mit einander verknüpft werden, den Potenzen analog. Das hte Element r mal gesetzt, wird durch $\overset{r}{h}$ angedeutet. Wird daher verlangt einem Formen-Inbegriffe, z. B. $\overset{k}{C}'[1..n]$, jenes hte Element r mal vorzusetzen, so bezeichnet man dieses durch $\overset{r}{h}.\overset{k}{C}'[1..n]$, so, daß:

$$\frac{h^r . \overset{k}{C}'[1..n]}{h^m} = h^{r-m} . \overset{k}{C}'[1..n] \text{ oder}$$

$$\frac{\overset{k}{C}'[1..n]}{h^m} = h^{-m} . \overset{k}{C}'[1..n] \text{ ist.}$$

So wird man auch, um Raum auf dem Papier zu ersparen, $\frac{\overset{k}{C}'[1..n]}{r}$ durch $r^{-1} . \overset{k}{C}'[1..n]$ bezeichnen können.

Eben so ist auch das combinatorische Nichts oder Null dem Nichts im Sinne der Multiplication, (welches bekanntlich die Einheit ist) ähnlich. Das Nichts, im Sinne der Arithmetik soll, einer richtigen Definition gemäß, zu einer Größe hinzugefügt, dieselbe ungeändert lassen. So entstehen also in diesem Sinne zweierlei Arten des Nichts, weil es zweierlei Arten ursprünglicher Größenverknüpfungen giebt, die Addition und die Multiplication; das Nichts also, welches sich auf dem Wege der Addition darstellt ist 0, dasjenige aber, welches man in Hinsicht auf Multiplication erhält ist die Einheit. Das combinatorische Nichts muß, zu einer Form im Sinne der Combinationslehre, hinzugefügt, dieselbe ungeändert lassen, kann also nichts anders, als eine oder verschiedene unbesetzte Stellen bedeuten. Es wäre vielleicht nicht unzweckmäßig, für das combinatorische Nichts, dergleichen z. B. $\overset{0}{C}'[1..n]$, $\overset{0}{C}[1..n]$, $^0\overset{k}{C}[1..]$, $\overset{0}{V}[1..]$, $^0\overset{k}{V}[1..]$, h^0, wo h ein gewisses Element bedeutet, $\overset{h}{C}[0]$, $V[0]$, und dgl. sind, ein eignes Zeichen einzuführen. Es ist daher, wie wir auch schon oben theils gesehen haben, $^0\overset{k}{C}[1..n].r. = r$, $^n\overset{0}{V}[1..p].123 = 123$, $h^0.\overset{k}{V}[1..] = \overset{k}{V}[1..]$ u. s. w. gerade, wie im Sinne der Arithmetik: $a - 0$ oder $a + 0 = a$, $a . 1$ oder $\frac{a}{1} = a$ ist.

Nach diesen kleinen, aber nicht unwichtigen Bemerkungen wollen wir zu unserm Zwecke zurückkehren.

Wir fanden die partielle Recursionsformel:

$$\overset{k}{C'}[1..n] = \overset{k-1}{C'}[1..(n-1)].n + \overset{k}{C'}[1..(n-1)],$$

es ist also auch:

$$\overset{k}{C'}[1..(n-1)] = \overset{k}{C'}[1..n] - \overset{k-1}{C'}[1..(n-1)].n,$$

oder, wenn man für n den Werth n + 1 setzt,

$$1)\quad \overset{k}{C'}[1..n] = \overset{k}{C'}[1..(n+1)] - \overset{k-1}{C'}[1..n].(n+1)$$

ferner findet man aus jener ersten Beziehung,

daß: $\overset{k-1}{C'}[1..(n-1)].n = \overset{k}{C'}[1..n] - \overset{k}{C'}[1..(n-1)]$ oder

$$\overset{k-1}{C'}[1..(n-1)] = \frac{\overset{k}{C'}[1..n] - \overset{k}{C'}[1..(n-1)]}{n},$$

oder, wenn man für k den Werth k + 1, und für n, n + 1 setzt,

daß 2) $\overset{k}{C'}[1..n] = \dfrac{\overset{k+1}{C'}[1..(n+1)] - \overset{k+1}{C'}[1..n]}{n+1}$ ist.

Führt man die Discerption, welche die erste abgeleitete Beziehung

$$\overset{k}{C'}[1..n] = \overset{k}{C'}[1..(n+1)] - \overset{k-1}{C'}[1..n].(n+1)$$

angiebt, an ihren Theilen aus, indem man jedesmal den, welcher die um eins niedrigere Klasse enthält, derselben unterwirft, so erhält man zuerst:

$$\overset{k-1}{C'}[1..n](n+1)] = \overset{k-1}{C'}[1..(n+1)].(n+1) - \overset{k-2}{C'}[1..n].(n+1)^2$$

ferner ist:

$$\overset{k-2}{C'}[1..n](n+1)^2 = \overset{k-2}{C'}[1..(n+1)](n+1)^2 - \overset{k-3}{C'}[1..n].(n+1)^3$$

u. s. f., also ist zuerst:

$$\overset{k}{C'}[1..n] = \overset{k}{C'}[1..(n+1)] - \overset{k-1}{C'}[1..(n+1)](n+1)$$
$$+ \overset{k-2}{C'}[1..(n+1)](n+1)^2 - \overset{k-3}{C'}[1..n](n+1)^3$$

Fährt man im Discerpiren fort, so wird man endlich noch n solcher Zertheilungen auf folgenden Ausdruck kommen:

$$\overset{k}{C'}[1..n] = \overset{k}{C'}[1..(n+1)] - \overset{k-1}{C'}[1..(n+1)].(n+1) + \ldots$$
$$+ (-1)^h.\overset{k-h}{C'}[1..(n+1)](n+1)^h + (-1)^{h+1}\overset{k-(h+1)}{C'}[1..n](n+1)^{h+1}$$

Ist endlich $h = k - 1$, so sind die beiden letzten Theile

$$= (-1)^{k-1}.\overset{1}{C'}[1..(n+1)](n+1)^{k-1} + (-1)^k \overset{0}{C'}[1..n](n+1)^k$$
$$= (-1)^{k-1}.\overset{1}{C'}[1..(n+1)](n+1)^{k-1} + (-1)^k.(n+1)^k,$$

und folglich ist die Totalrecursionsformel:

$$\overset{k}{C'}[1..n] = \overset{k}{C'}[1..(n+1)] - \overset{k-1}{C'}[1..(n+1)](n+1) + .. + (-1)^h.$$
$$\overset{k-h}{C'}[1..(n+1)](n+1)^h \ldots + (-1)^{k-1}.\overset{1}{C'}[1..(n+1)](n+1)^{k-1} + (-1)^k.(n+1)^k$$

Recurrirende Bestimmungen dieser Art sind zur wirklichen Darstellung des Gefoderten nicht geeignet, weil man zuerst viel Ueberflüssiges berechnen muß, um dieses hernach wieder aufzuheben. Z. B.

$$\overset{3}{C'}[1..4] = \overset{3}{C'}[1..5] - \overset{2}{C'}[1..5].5 + \overset{1}{C'}[1..5].5^2 - \overset{0}{C'}[1..5].5^3$$

$\overset{3}{C'}[1..5] =$ 123, 124, 125, 134
135, 145, 234, 235
245, 345

$= - \overset{2}{C'}[1..5].5 =$ — (125), — (135), — (145), — (155)
— (235), — (245), — (255), — (345)
— (355), — (455)

$$+ \overset{1}{C}'[1..5].5^2 = 155,\ 255,\ 355,\ 455,\ 555$$

$$- \overset{0}{C}'[1..5].5^3 = -(555)$$

Nachdem man die gleichen aber widerstreitenden Formen gegen einander aufgehoben hat, erhält man:

$$\overset{3}{C}'[1..4] = 123,\ 124,\ 134,\ 234.$$

allein den eigentlichen Nutzen, welchen alle recurrirende Bestimmungen verschaffen, gewähren auch sie, wie die übrigen.

Discerpirt man aber jedesmal den Theil der partiellen Recursionsformel,

$$\overset{k}{C}'[1..n] = \overset{k}{C}'[1..(n+1)] - \overset{k-1}{C}'[1..n](n+1),$$

welcher von der gleichhohen Klasse k ist, so hat man

$$\overset{k}{C}'[1..(n+1)] = \overset{k}{C}'[1..(n+2)] - \overset{k-1}{C}[1..(n+1)].(n+2)$$

ferner:

$$\overset{k}{C}'[1..(n+2)] = \overset{k}{C}'[1..(n+3)] - \overset{k-1}{C}'[1..(n+2)].(n+3) \text{ u. s. f.}$$

also zuerst:

$$\overset{k}{C}'[1..n] = -\overset{k-1}{C}'[1..n](n+1) - \overset{k-1}{C}'[1..(n+1)](n+2)$$
$$- \overset{k-1}{C}'[1..(n+2)](n+3) + \overset{k}{C}'[1..(n+3)]$$

Nach h-1 Discerptionen gelangt man zu

$$\overset{k}{C}'[1..n] = -\overset{k-1}{C}'[1..n](n+1) - \overset{k-1}{C}'[1..(n+1)].(n+2)\ldots$$
$$- \overset{k-1}{C}'[1..(n+h-1)].(n+h) + \overset{k}{C}'[1..(n+h)]$$

Die Klasse, k-1, bleibt während den Discerptionen immer dieselbe, indem die Anzahl der Elemente, aus denen sich die gefoderten Formen bilden sollen, immer größer wird; die Discerption kann also nie beschränkt seyn, und jedes folgende Glied ist möglich und darstellbar. Die Formel kann also nur willkührlich abgebrochen werden, und man hat daher für jedes r, den allgemeinen Ausdruck:

$$\overset{k}{C}'[1..n] = \overset{k}{C}'[1..(n+1)] - \overset{k-1}{C}'[1..n](n+1) - \ldots$$
$$- \overset{k-1}{C}'[1..(n+h-1)](n+h)\ldots - \overset{k-1}{C}'[1..(n+r-1)](n+r)$$

Setzt man in diese Formel für n den Werth o, so hat man

$$\overset{k}{C}'[o] = \overset{k}{C}'[1..r] - \overset{k-1}{C}'[o].1 - \overset{k-1}{C}'[1]2 - \ldots - \overset{k-1}{C}'[1..(h-1)]h \ldots$$
$$- \overset{k-1}{C}'[1..(r-1)]r$$

d. h.

$$\overset{k}{C}'[1..r] = \overset{k-1}{C}'[o].1 + \overset{k-1}{C}'[1.]2 + \ldots + \overset{k-1}{C}'[1..(h-1)].h..$$
$$+ \overset{k-1}{C}'[1..(r-1)].r$$

Die ersten Glieder dieser Recursion sind, so lange die Anzahl der Elemente, aus welchen sie erzeugt werden sollen, kleiner ist, wie die Klasse k-1, Unmögliches fordernde Ausdrücke; das erste reelle Glied wird $\overset{k-1}{C}'[1..(k-1)]k$ seyn, und man hat daher:

$$\overset{k}{C}'[1..r] = \overset{k-1}{C}'[1..(k-1)]k + \overset{k-1}{C}'[1..k].(k+1)\ldots. + \overset{k-1}{C}'[1..(r-1)]r,$$

oder:

$$\overset{k}{C}'[1..r] = \overset{k-1}{C}'[1..(r-1)]r + \overset{k-1}{C}'[1..(r-2)].(r-1)\ldots + \overset{k-1}{C}'[1..(k-1)].k.$$

eine Formel, zu welcher wir schon auf directem Wege gelangt sind.

Aus der ursprünglichen Recursionsformel ging zweitens folgende Beziehung hervor:

$$\overset{k}{C}'[1..n] = \frac{\overset{k+1}{C}'[1..(n+1)] - \overset{k+1}{C}'[1..n]}{n+1}$$

welche, wie jede partielle Recursionsformel, durch Discerption in eine vollständige verwandelt werden kann.

Discerpirt man den negativen Theil, so erhält man:

$$\overset{k+1}{C'}[1..n] = \frac{\overset{k+2}{C'}[1..(n+1)] - \overset{k+2}{C'}[1..n]}{n+1} \text{ also zunächst:}$$

$$\overset{k}{C'}[1..n] = \frac{\overset{k+1}{C'}[1..(n+1)] - \dfrac{\overset{k+2}{C'}[1..(n+1)] - \overset{k+2}{C'}[1..n]}{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{\overset{k+1}{C'}[1..(n+1)](n+1) - \overset{k+2}{C'}[1..(n+1)] + \overset{k+2}{C'}[1..n]}{(n+1)^2}$$

Ferner ist:

$$\overset{k+2}{C'}[1..n] = \frac{\overset{k+3}{C'}[1..(n+1)] - \overset{k+3}{C'}[1..n]}{n+1} \text{ also:}$$

$$\overset{k}{C'}[..n] = \frac{\overset{k+1}{C'}[..(n+1)](n+1) - \overset{k+2}{C'}[1..(n+1)] + \dfrac{\overset{k+3}{C'}[1..(n+1)] - \overset{k+3}{C'}[1..n]}{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{\overset{k+1}{C'}[1..(n+1)](n+1)^2 - \overset{k+2}{C'}[1..(n+1)](n+1) + \overset{k+3}{C'}[1..(n+1)] - \overset{k+3}{C'}[1..n]}{(n+1)^3}$$

Man wird nach $r-1$ Discerptionen auf den Ausdruck:

$$\overset{k}{C'}[1..n] = \frac{\overset{k+1}{C'}[1..(n+1)](n+1)^{r-1} - \overset{k+2}{C'}[1..(n+1)](n+1)^{r-2} \ldots + (-1)^{r-1}\overset{k+r}{C'}[1..(n+1)](n+1)^{0} + (-1)^{r}\overset{k+r}{C'}[1..n]}{(n+1)^r}$$

Diese Formel bricht ab, sobald $k+r=n+1$ oder $r=n-k+1=n-(k-1)$ ist; alsdann findet man:

$$\overset{k}{C}'[1..n]=\frac{\overset{k+1}{C}'[1..(n+1)].(n+1)^{n-k}-\ldots+(-1)^{h-1}.\overset{k+h}{C}'[1..(n+1)](n+1)^{n-k-(h-1)}\ldots+(-1)^{n+k}.\overset{n+1}{C}'[1..(n+1)](n+1)^{0}}{(n+1)^{n-(k-1)}}$$

eine Formel, welche man auch folgendermaßen schreiben kann:

$$\overset{k}{C}'[1..n]=\overset{k+1}{C}'[1..(n+1)](n+1)^{-1}-\ldots+(-1)^{h-1}.\overset{k+h}{C}'[1..(n+1)](n+1)^{-h}\ldots$$
$$+(-1)^{n+k}.\overset{n+1}{C}'[1..(n+1)](n+1)^{-(n-(k-1))}$$

Zerlegt man aber den andern Theil der partiellen Recursionsformel, so findet man:

$$\overset{k+1}{C}'[1..(n+1)]=\frac{\overset{k+2}{C}'[1..(n+2)]-\overset{k+2}{C}'[1..(n+1)]}{n+2}$$

also:

$$\overset{k}{C}'[1..n]=\frac{-\overset{k+1}{C}'[1..n]+\dfrac{-\overset{k+2}{C}'[1..(n+1)]+\overset{k+2}{C}'[1..(n+2)]}{n+2}}{n+1}$$

$$=\frac{-\overset{k+1}{C}'[1..n](n+2)-\overset{k+2}{C}'[1..(n+1)]+\overset{k+2}{C}'[1..(n+2)]}{(n+1).(n+2)}$$

Man wird allgemein nach r Discerptionen den Ausdruck:

$$\overset{k}{C}'[1..n]=\frac{-\overset{k+1}{C}'[1..n](n+r+1)..(n+2)..-\overset{k+h}{C}'[1..(n+(h-1))].(n+r+1)..(n+h+1)\ldots-\overset{k+r+1}{C}'[1..(n+r)]+\overset{k+r+1}{C}'[1..(n+r+1)]}{(n+r+1).(n+r)\ldots(n+1)}$$

finden.

Diese Formel kann ihrer Natur gemäß nie abbrechen, denn die Klassen-Exponenten nehmen mit der Anzahl der Elemente gleichmäßig zu. Man hat daher für jedes willkührliche r folgende Totalrecursionsformel:

$$\overset{k}{C}'[1..n] = \frac{\overset{k+r}{C}'[1..(n+r)] - \overset{k+1}{C}'[1..n](n+r)..(n+2) - \ldots \overset{k+h}{C}'[1..(n+h-1)](n+r)\ldots(n+h+1)\ldots - \overset{k+r}{C}'[1..(n+r-1)]}{(n+r)(n+r-1)\ldots(n+1)}$$

Dieser Ausdruck gehet in eine bekannte Recursionsformel über, sobald man $k=0$ setzt, denn alsdann ist:

$$\overset{0}{C}'[1..n] = \frac{\overset{r}{C}'[1..(n+r)] - \overset{1}{C}'[1..n](n+r)..(n+2)\ldots - \overset{h}{C}'[1..(n+h-1)](n+r)..(n+h+1)\ldots - \overset{r}{C}'[1..(n+r-1)]}{(n+r).(n+r-1)\ldots(n+1)}$$

d. h.

$$(n+r)(n+r-1)..(n+1) = \overset{r}{C}'[1..(n+r)] - \overset{1}{C}'[1..n](n+r)..(n+2)\ldots - \overset{h}{C}'[1..(n+h-1)](n+r). (n+h+1)\ldots - \overset{r}{C}'[1..(n+r-1)]$$

oder:

$$\overset{r}{C}'[1..(n+r)] = (n+r)(n+r-1)..(n+1) + \overset{1}{C}'[1..n](n+r)..(n+2)\ldots + \overset{h}{C}'[1..(n+h-1)].(n+r).. (n+h+1)\ldots + \overset{r}{C}'[1..(n+r-1)]$$

Nimmt man die Folge der Glieder umgekehrt, und setzt $n+r=m$, so hat man:

$$\overset{r}{C}'[1..m] = \overset{r}{C}'[1..(m-1)] + \ldots + \overset{r-h}{C}'[1..(m-(h+1))]m.(m-1)..(m-(h-1)\ldots + \overset{1}{C}'[1..(m-r)] m(m-1)..(m-(r-2)) + \overset{0}{C}'[1..(m-(r+1))]m(m-1)..(m-(r-1))$$

eine Recursionsformel, zu welcher wir schon oben gelangten.

B. Bei unbedingter Wiederholbarkeit.

§. 16.

Independentes Verfahren.

Da jedes Element so oft wiederholt werden kann, als man will, d. h. so oft es die Klasse erlaubt, so bildet sich nach §. 4. die niedrigste Form, indem man alle Stellen mit dem niedrigsten Elemente besetzt. Die niedrigste Form von $\overset{4}{C}$ [1..5] ist 1111. Hat man, um eine Form in die nächsthöhere zu verwandeln, die späteste Stelle erhöhet, so wird man, da nach §. 4. die folgenden Stellen so niedrig, als möglich ausgefüllt werden müssen, aber der Annahme im §. 13. gemäß, nie ein niedrigeres Element auf ein höheres folgen darf, alle nachfolgenden Stellen mit demselben Elemente ausfüllen, mit welchem man erhöhet hat. Damit also überhaupt eine Stelle erhöhbar seyn soll, ist es nur nöthig, daß es ein höheres Element gebe, als in ihr steht. Hat man z. B. aus den Elementen 1234 eine Form 133 gebildet, so wird die nächsthöhere Form 134 seyn, weil die 3te Stelle die späteste war, die eine Erhöhung ertrug; die darauf folgende ist 144, wovon die nächsthöhere 222 ist.

Z. B.

$\overset{3}{C}$[1..4] = 111, 112, 113, 114
122, 123, 124, 133
134, 144, 222, 223
224, 233, 234, 244
333, 334, 344, 444

Ferner:

$\overset{4}{C}$[1..5] = 1111, 1112, 1113, 1114
1115, 1122, 1123, 1124
1125, 1133, 1134, 1135

1144, 1145, 1155, 1222
1223, 1224, 1225, 1233
1234, 1235, 1244, 1245
1255, 1333, 1334, 1335
1344, 1345, 1355, 1444
1445, 1455, 1555, 2222
2223, 2224, 2225, 2233
2234, 2235, 2244, 2245
2255, 2333, 2334, 2335
2344, 2345, 2355, 2444
2445, 2455, 2555, 3333
3334, 3335, 3344, 3345
3355, 3444, 3445, 3455
3555, 4444, 4445, 4455
4555, 5555.

Ferner:

$$\overset{4}{C}[1, 2] = 1111,\ 1112,\ 1122,\ 1222,\ 2222.$$

$$\overset{1}{C}[1..5] = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

$$\overset{6}{C}[1] = 111111.$$

Liest man alle Formen, die aus gegebenen Elementen gebildet werden können, rückwärts, oder drehet man jede Form um, so, daß die höchste Stelle zur ersten, diese zur höchsten wird, so hat man, wie bei den Combinationen bei verbotener Wiederholbarkeit, alle jene Formen wieder, in denen jedoch die Elemente in der umgekehrten Ordnung erscheinen, d. h. in denen nie auf ein niedrigeres Element ein höheres folgt, so, daß sie aus den gegebenen Elementen, in umgekehrter Ordnung genommen, gebildet erscheinen. Liest man daher die Formen: $\overset{k'}{C}[1..n]$ rückwärts, so hat man $\overset{k}{C}[n..1]$ gelesen, oder umgekehrt. Liest man $r.\overset{k}{C}[1..n]$ rückwärts, so hat man $\overset{k}{C}[n..1].r$ gelesen, oder umgekehrt.

§. 17.

Recurrirendes Verfahren.

Die niedrigste Form enthält nur erste Elemente, schneidet man das Anfangs-Element davon ab, so bleibt die niedrigste Form von denen übrig, welche sich aus denselben Elementen zur nächstvorhergehenden Klasse bilden lassen, denn es sind alle Stellen so niedrig, als möglich besetzt. Diese niedrigste Form der anfänglich gefoderten Klasse erhöhete man nach und nach dadurch, daß man alle nachfolgenden Stellen successiv so hoch besetzte, bis keine von ihnen mehr einer Erhöhung fähig war, ehe man die erste Stelle angriff, um auch sie zur Erhöhung zu ziehen. Man bildete also, um die erste Ordnung der gefoderten Klasse zu erzeugen, alle Combinationsformen zur nächstniedrigeren Klasse aus denselben Elementen, indem man jeder Form derselben ein niedrigstes Element vorsetzte. Darauf griff man auch die erste Stelle an, besetzte sie mit einem zweiten Elemente, indem man alle folgenden mit demselben Elemente ausfüllte, d. h. man bildete nach §. 4. die niedrigste Form, welche sich aus den Elementen 2, 3 ... bei unbedingt gestatteter Wiederholbarkeit der Elemente zur anfänglich gefoderten Klasse erzeugen ließ. Diese Form erhöhete man nun nach und nach, bis zur höchsten, so daß daraus ein Inbegriff aller Combinationsformen zur gefoderten Klasse aus denselben Elementen, außer dem ersten, entstanden. So wird also die gefoderte Klasse aus zwei Theilen bestehen, wovon der erste der Inbegriff aller Combinationsformen aus denselben Elementen zur nächstniedrigeren Klasse, denen sämmtlich das erste Element vorgesetzt ist, der andere der Inbegriff aller Combinationsformen zur gefoderten Klasse selbst, aber aus den gegebenen Elementen außer dem ersten seyn wird, so, daß also allgemein in Zeichen ausgedrückt, folgende partielle Recursionsformel entsteht:

$$\overset{k}{C}[1..n] = 1.\overset{k-1}{C}[1..n] + \overset{k}{C}[2..n]$$

Wendet man die Regel der Discerption, welche sie angiebt, auf den Theil $\overset{k}{C}[2..n]$ an, so ist:

$$\overset{k}{C}[2..n] = 2.\overset{k-1}{C}[2..n] + \overset{k}{C}[3..n]$$

ferner:

$$\overset{k}{C}[3..n] = 3.\overset{k-1}{C}[3..n] + \overset{k}{C}[4..n]$$

wenn man diese Werthe substituirt, so findet man zunächst:

$$\overset{k}{C}[1..n] = 1.\overset{k-1}{C}[1..n] + 2.\overset{k-1}{C}[2..n] + 3.\overset{k-1}{C}[3..n] + \overset{k}{C}[4..n].$$

Man wird, wenn man immer den Theil, welcher die kte Klasse anzeigt, wieder discerpirt, nach r solchen Zertheilungen auf:

$$r.\overset{k-1}{C}[r..n] + \overset{k}{C}[(r+1)..n]$$

gekommen seyn. Die Elemente, aus denen sich die Klassen bilden sollen, nehmen an Anzahl bei jeder Discerption ab; ist man endlich zur nten Discerption gekommen, oder ist in obigem Ausdrucke $r = n$, so ist er

$$n.\overset{k-1}{C}[n] + \overset{k}{C}[0]$$

im ersten Theil sind $n-1$, im andern n Elemente weggenommen, wodurch sich der zweite Theil in $\overset{k}{C}[0]$ verwandelt, welcher also wegfällt. $n.\overset{k-1}{C}[n]$ ist der letzte Theil der Recursionsformel, und deutet nur eine Form an, welche das höchste Element, n, kmal enthält. Die Totalrecursionsformel ist also:

$$\overset{k}{C}[1..n] = 1.\overset{k-1}{C}[1..n] + 2.\overset{k-1}{C}[2..n] + 3.\overset{k-1}{C}[3..n] \ldots + r.\overset{k-1}{C}[r..n] \ldots + n.\overset{k-1}{C}[n].$$

Z. B.

$$\overset{4}{C}[1..3] = 1.\overset{3}{C}[1..3] + 2.\overset{3}{C}[2..3] + 3.\overset{3}{C}[3]$$

$$= \left\{ \begin{array}{lll} 1.\overset{3}{C}[1..3] & = & 1.111,\ 1.112,\ 1.113,\ 1.122 \\ & & 1.123,\ 1.133,\ 1.222,\ 1223 \\ & & 1.233,\ 1.333 \\ +\ 2.\overset{3}{C}[2..3] & = & 2.222,\ 2.223,\ 2.233,\ 2.333 \\ +\ 3.\overset{3}{C}[3] & = & 3.333 \end{array} \right.$$

Ferner:

$$\overset{3}{C}[1..4] = 1.\overset{2}{C}[1..4] + 2.\overset{2}{C}[2..4] + 3.\overset{2}{C}[3,4] + 4.\overset{2}{C}[4]$$

$$= \left\{ \begin{array}{lll} 1.\overset{2}{C}[1..4] & = & 1.11,\ 1.12,\ 1.13,\ 1.14 \\ & & 1.22,\ 1.23,\ 1.24,\ 1.33 \\ & & 1.34,\ 1.44 \\ +\ 2.\overset{2}{C}[2..4] & = & 2.22,\ 2.23,\ 2.24,\ 2.33 \\ & & 2.34,\ 2.44 \\ +\ 3.\overset{2}{C}[3,4] & = & 3.33,\ 3.34,\ 3.44 \\ +\ 4.\overset{2}{C}[4] & = & 4.44 \end{array} \right.$$

$$\overset{5}{C}[1,2] = 1.\overset{4}{C}[1,2] + 2.\overset{4}{C}[2]$$

$$= \left\{ \begin{array}{lll} 1.\overset{4}{C}[1,2] & = & 1.1111,\ 1.1112,\ 1.1122,\ 1.1222,\ 1.2222 \\ 2.\overset{4}{C}[2] & = & 2.2222 \end{array} \right.$$

Zerlegt man aber den Theil der partiellen Recursionsformel:

$$\overset{k}{C}[1..n] = 1.\overset{k-1}{C}[1..n] + \overset{k}{C}[2..n],$$

welcher die nächstniedrigere Klasse enthält, oder: $1.\overset{k-1}{C}[1..n]$, so erhält man zuerst:

$$1 \cdot \overset{k-1}{C}[1..n] = 11 \cdot \overset{k-2}{C}[1..n] + 1 \cdot \overset{k-1}{C}[2..n]$$

ferner:

$$11 . \overset{k-2}{C}[1..n] = 111 . \overset{k-3}{C}[1..n] + 11 . \overset{k-2}{C}[2..n],$$ also zunächst:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[2..n] + 1 . \overset{k-1}{C}[2..n] + 11 . \overset{k-2}{C}[2..n] + 111 . \overset{k-3}{C}[1..n]$$

Man gelangt nun, wenn man fortfährt, jedesmal den Theil wieder zu zerlegen, welcher aus den Elementen $1..n$ gebildet ist, nach r solchen Zertheilungen auf:

$$1^{r-1}\overset{k-(r+1)}{C}[1..n] + 1^{r}\overset{k-r}{C}[2..n],$$

wenn 1^r andeuten soll, daß das erste Element r mal vorgesetzt werden soll. Dieser Ausdruck gehet in:

$$1^{k}\overset{0}{C}[1..n] + 1^{k-1}\overset{1}{C}[2..n]$$
$$= 1^{r-1}\overset{1}{C}[2..n] + 1^{k}$$

über, sobald $r = k-1$ wird, und dieses ist der letzte mögliche Theil der Recursionsformel:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[2..n] + 1 . \overset{k-1}{C}[2..n] + 1^{2}\overset{k-2}{C}[2..n] \ldots + 1^{r}\overset{k-r}{C}[2..n] \ldots$$
$$+ 1^{k}\overset{0}{C}[2..n]$$

Z. B.

$$\overset{3}{C}[1..3] = \overset{3}{C}[2,3] + 1 . \overset{2}{C}[2,3] + 11 . \overset{1}{C}[2,3] + 111 . \overset{0}{C}.$$

$$= \begin{cases} \overset{3}{C}[2,3] = 222,\ 223,\ 233,\ 333 \\ + 1 . \overset{2}{C}[2,3] = 1.22,\ 1.23,\ 1.33 \\ + 11 . \overset{1}{C}[2,3] = 11.2,\ 11.3 \\ + 111 . \overset{0}{C} = 111 \end{cases}$$

Ferner:

$$\overset{3}{C}[1..5] = \overset{4}{C}[2..5] + 1.\overset{3}{C}[2..5] + 11.\overset{2}{C}[2..5] + 111.\overset{1}{C}[2..5] + 1111.\overset{0}{C}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l}
\overset{4}{C}[2..5] = \left\{ \begin{array}{llll} 2222, & 2223, & 2224, & 2225 \\ 2233, & 2234, & 2235, & 2244 \\ 2245, & 2255, & 2333, & 2334 \\ 2335, & 2344, & 2345, & 2355 \\ 2444, & 2445, & 2455, & 2555 \\ 3333, & 3334, & 3335, & 3344 \\ 3345, & 3355, & 3444, & 3445 \\ 3455, & 3555, & 4444, & 4445 \\ 4455, & 4555, & 5555. & \end{array} \right. \\
+ 1.\overset{3}{C}[2..5] = \left\{ \begin{array}{llll} 1.222, & 1.223, & 1.224, & 1.225 \\ 1.233, & 1.234, & 1.235, & 1.244 \\ 1.245, & 1.255, & 1.333, & 1.334 \\ 1.335, & 1.344, & 1.345, & 1.355 \\ 1.444, & 1.445, & 1.455, & 1.555. \end{array} \right. \\
+ 11.\overset{2}{C}[2..5] = \left\{ \begin{array}{llll} 11.22, & 11.23, & 11.24, & 11.25 \\ 11.33, & 11.34, & 11.35, & 11.44 \\ 11.45, & 11.55. & & \end{array} \right. \\
111.\overset{1}{C}[2..5] = 111.2, \quad 111.3, \quad 111.4, \quad 111.5. \\
1111.\overset{0}{C} \quad = 1111
\end{array} \right.$$

Hätte man statt der steigenden Anordnung der Elemente die fallende befolgt, d. h. hätte man das höchste Element, n, als niedrigstes, das erste, 1, als höchstes angesehen, so hätte die partielle Recursionsformel:

$$\overset{k}{C}[1..n] = 1.\overset{k-1}{C}[1..n] + \overset{k}{C}[2..n]$$

die Gestalt

$$\overset{k}{C}[n..1] = n.\overset{k-1}{C}[n..1] + \overset{k}{C}[(n-1)..1]$$

gehabt, indessen kann man diese, durch obige Klassen-Inbegriffe angedeuteten Formen wieder umkehren, und man wird die anfänglich angenommene Anordnung wieder erhalten, (§. 16) so, daß man folgende partielle Recursionsformel hat:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k-1}{C}[1..n]n + \overset{k}{C}[1..(n-1)],$$

welche durch Nachsetzen von Elementen höhere Klassen ableitet.

Discerpirt man sie jedesmal so, daß der Theil, welcher dieselbe Klasse, k, enthält, zerlegt wird, so findet man zuerst

$$\overset{k}{C}[1..(n-1)] = \overset{k-1}{C}[1..(n-1)](n-1) + \overset{k}{C}[1..(n-2)]$$

ferner:

$$\overset{k}{C}[1..(n-2)] = \overset{k-1}{C}[1..(n-2)].(n-2) + \overset{k}{C}[1..(n-3)]$$

also:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k-1}{C}[1..n].n + \overset{k-1}{C}[1..(n-1)](n-1) + \overset{k-1}{C}[1..(n-2)](n-2)$$
$$+ \overset{k}{C}[1..(n-3)].$$

Man wird nach r Discerptionen auf:

$$\overset{k-1}{C}[1..(n-r)](n-r) + \overset{k}{C}[1..(n-(r+1))]$$

gekommen seyn. Ist aber $r = n-1$, so ist dieser Ausdruck

$$= \overset{k-1}{C}[1].1 + \overset{k}{C}[0] = \overset{k-1}{C}[1].1 = 1^k,$$

welcher also den letzten Theil folgender Totalrecursionsformel ausmachen wird:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k-1}{C}[1..n]\,n + \overset{k-1}{C}[1..(n-1)](n-1) + \overset{k-1}{C}[1..(n-2)](n-2)\ldots$$
$$+ \overset{k-1}{C}[1..(n-r)](n-r)\ldots \overset{k-1}{C}[1].1$$

Z. B.

$$\overset{2}{C}[1..3] = \overset{1}{C}[1..3].3 + \overset{1}{C}[1,2].2 + \overset{1}{C}[1]1$$

$$= \begin{cases} \quad \overset{1}{C}[1..3].3 = 1.3,\ 2.3,\ 3.3 \\ + \overset{1}{C}[1,2].2 = 1.2,\ 2.2 \\ + \overset{1}{C}[1].1 = 11 \end{cases}$$

Ferner:

$$\overset{3}{C}[1..4] = \overset{2}{C}[1..4].4 + \overset{2}{C}[1..3].3 + \overset{2}{C}[1,2].2 + \overset{2}{C}[1].1$$

$$= \begin{cases} \quad \overset{2}{C}[1..4].4 = \begin{cases} 11.4,\ 12.4,\ 13.4,\ 14.4 \\ 22.4,\ 23.4,\ 24.4,\ 33.4 \\ 34.4,\ 44.4 \end{cases} \\ + \overset{2}{C}[1..3].3 = \begin{cases} 11.3,\ 12.3,\ 13.3,\ 22.3 \\ 23.3,\ 33.3 \end{cases} \\ + \overset{2}{C}[1,2].2 = 11.2,\ 12.2,\ 22.2 \\ + \overset{2}{C}[1].1 = 11.1 \end{cases}$$

Discerpirt man nun aber den Theil der partiellen Recursionsformel:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k-1}{C}[1..n].n + \overset{k}{C}[1..(n-1)],$$

welcher die nächstniedrigere Klasse enthält, $\overset{k-1}{C}[1..n].n$, so findet man, da:

Diese Formel kann ihrer Natur gemäß nie abbrechen, denn die Klassen-Exponenten nehmen mit der Anzahl der Elemente gleichmäßig zu. Man hat daher für jedes willkührliche r folgende Totalrecursionsformel:

$$\overset{k}{C}'[1..n] = \frac{\overset{k+r}{C}'[1..(n+r)] - \overset{k+1}{C}'[1..n](n+r)..(n+2) - \ldots \overset{k+h}{C}'[1..(n+h-1)](n+r)\ldots(n+h+1)\ldots - \overset{k+r}{C}'[1..(n+r-1)]}{(n+r)(n+r-1)\ \ldots\ (n+1)}$$

Dieser Ausdruck gehet in eine bekannte Recursionsformel über, sobald man $k=0$ setzt, denn alsdann ist:

$$\overset{0}{C}'[1..n] = \frac{\overset{r}{C}'[1..(n+r)] - \overset{1}{C}'[1..n](n+r)..(n+2)\ldots - \overset{h}{C}'[1..(n+h-1)](n+r)..(n+h+1)\ldots - \overset{r}{C}'[1..(n+r-1)]}{(n+r).(n+r-1)\ \ldots\ (n+1)}$$

d. h.

$$(n+r)(n+r-1)..(n+1) = \overset{r}{C}'[1..(n+r)] - \overset{1}{C}'[1..n](n+r)..(n+2)\ldots - \overset{h}{C}'[1..(n+h-1)](n+r).$$
$$(n+h+1)\ \ldots - \overset{r}{C}'[1..(n+r-1)]$$

oder:

$$\overset{r}{C}'[1..(n+r)] = (n+r)(n+r-1)..(n+1) + \overset{1}{C}'[1..n](n+r)..(n+2)\ldots + \overset{h}{C}'[1..(n+h-1)].(n+r)..$$
$$(n+h+1)\ldots + \overset{r}{C}'[1..(n+r-1)]$$

Nimmt man die Folge der Glieder umgekehrt, und setzt $n+r=m$, so hat man:

$$\overset{r}{C}'[1..m] = \overset{r}{C}'[1..(m-1)] + \ldots + \overset{r-h}{C}'[1..(m-(h+1))]m.(m-1)..(m-(h-1)\ldots + \overset{1}{C}'[1..(m-r)]$$
$$m(m-1)..(m-(r-2)) + \overset{0}{C}'[1..(m-(r+1))]m(m-1)..(m-(r-1))$$

eine Recursionsformel, zu welcher wir schon oben gelangten.

B. Bei unbedingter Wiederholbarkeit.

§. 16.

Independentes Verfahren.

Da jedes Element so oft wiederholt werden kann, als man will, d. h. so oft es die Klasse erlaubt, so bildet sich nach §. 4. die niedrigste Form, indem man alle Stellen mit dem niedrigsten Elemente besetzt. Die niedrigste Form von $\overset{4}{C}[1..5]$ ist 1111. Hat man, um eine Form in die nächsthöhere zu verwandeln, die späteste Stelle erhöhet, so wird man, da nach §. 4. die folgenden Stellen so niedrig, als möglich ausgefüllt werden müssen, aber der Annahme im §. 13. gemäß, nie ein niedrigeres Element auf ein höheres folgen darf, alle nachfolgenden Stellen mit demselben Elemente ausfüllen, mit welchem man erhöhet hat. Damit also überhaupt eine Stelle erhöhbar seyn soll, ist es nur nöthig, daß es ein höheres Element gebe, als in ihr steht. Hat man z. B. aus den Elementen 1234 eine Form 133 gebildet, so wird die nächsthöhere Form 134 seyn, weil die 3te Stelle die späteste war, die eine Erhöhung ertrug; die darauf folgende ist 144, wovon die nächsthöhere 222 ist.

Z. B.

$\overset{3}{C}[1..4]$ = 111, 112, 113, 114
122, 123, 124, 133
134, 144, 222, 223
224, 233, 234, 244
333, 334, 344, 444

Ferner:

$\overset{4}{C}[1..5]$ = 1111, 1112, 1113, 1114
1115, 1122, 1123, 1124
1125, 1133, 1134, 1135

1144, 1145, 1155, 1222
1223, 1224, 1225, 1233
1234, 1235, 1244, 1245
1255, 1333, 1334, 1335
1344, 1345, 1355, 1444
1445, 1455, 1555, 2222
2223, 2224, 2225, 2233
2234, 2235, 2244, 2245
2255, 2333, 2334, 2335
2344, 2345, 2355, 2444
2445, 2455, 2555, 3333
3334, 3335, 3344, 3345
3355, 3444, 3445, 3455
3555, 4444, 4445, 4455
4555, 5555.

Ferner:

$\overset{4}{C}[1, 2] = 1111, 1112, 1122, 1222, 2222.$

$\overset{1}{C}[1..5] = 1, 2, 3, 4, 5.$

$\overset{6}{C}[1] = 111111.$

Liest man alle Formen, die aus gegebenen Elementen gebildet werden können, rückwärts, oder drehet man jede Form um, so, daß die höchste Stelle zur ersten, diese zur höchsten wird, so hat man, wie bei den Combinationen bei verbotener Wiederholbarkeit, alle jene Formen wieder, in denen jedoch die Elemente in der umgekehrten Ordnung erscheinen, d. h. in denen nie auf ein niedrigeres Element ein höheres folgt, so, daß sie aus den gegebenen Elementen, in umgekehrter Ordnung genommen, gebildet erscheinen. Liest man daher die Formen: $\overset{k'}{C}[1..n]$ rückwärts, so hat man $\overset{k}{C}[n..1]$ gelesen, oder umgekehrt. Liest man $r.\overset{k}{C}[1..n]$ rückwärts, so hat man $\overset{k}{C}[n..1].r$ gelesen, oder umgekehrt.

§. 17.

Recurrirendes Verfahren.

Die niedrigste Form enthält nur erste Elemente, schneidet man das Anfangs-Element davon ab, so bleibt die niedrigste Form von denen übrig, welche sich aus denselben Elementen zur nächstvorhergehenden Klasse bilden lassen, denn es sind alle Stellen so niedrig, als möglich besetzt. Diese niedrigste Form der anfänglich gefoderten Klasse erhöhete man nach und nach dadurch, daß man alle nachfolgenden Stellen successiv so hoch besetzte, bis keine von ihnen mehr einer Erhöhung fähig war, ehe man die erste Stelle angriff, um auch sie zur Erhöhung zu ziehen. Man bildete also, um die erste Ordnung der gefoderten Klasse zu erzeugen, alle Combinationsformen zur nächstniedrigeren Klasse aus denselben Elementen, indem man jeder Form derselben ein niedrigstes Element vorsetzte. Darauf griff man auch die erste Stelle an, besetzte sie mit einem zweiten Elemente, indem man alle folgenden mit demselben Elemente ausfüllte, d. h. man bildete nach §. 4. die niedrigste Form, welche sich aus den Elementen 2, 3 ... bei unbedingt gestatteter Wiederholbarkeit der Elemente zur anfänglich gefoderten Klasse erzeugen ließ. Diese Form erhöhete man nun nach und nach, bis zur höchsten, so daß daraus ein Inbegriff aller Combinationsformen zur gefoderten Klasse aus denselben Elementen, außer dem ersten, entstanden. So wird also die gefoderte Klasse aus zwei Theilen bestehen, wovon der erste der Inbegriff aller Combinationsformen aus denselben Elementen zur nächstniedrigeren Klasse, denen sämmtlich das erste Element vorgesetzt ist, der andere der Inbegriff aller Combinationsformen zur gefoderten Klasse selbst, aber aus den gegebenen Elementen außer dem ersten seyn wird, so, daß also allgemein in Zeichen ausgedrückt, folgende partielle Recursionsformel entsteht:

$$\overset{k}{C}[1..n] = 1.\overset{k-1}{C}[1..n] + \overset{k}{C}[2..n]$$

Wendet man die Regel der Discerption, welche sie angiebt, auf den Theil $\overset{k}{C}[2..n]$ an, so ist:

$$\overset{k}{C}[2..n] = 2.\overset{k-1}{C}[2..n] + \overset{k}{C}[3..n]$$

ferner:

$$\overset{k}{C}[3..n] = 3.\overset{k-1}{C}[3..n] + \overset{k}{C}[4..n]$$

wenn man diese Werthe substituirt, so findet man zunächst:

$$\overset{k}{C}[1..n] = 1.\overset{k-1}{C}[1..n] + 2.\overset{k-1}{C}[2..n] + 3.\overset{k-1}{C}[3..n] + \overset{k}{C}[4..n].$$

Man wird, wenn man immer den Theil, welcher die kte Klasse anzeigt, wieder discerpirt, nach r solchen Zertheilungen auf:

$$r.\overset{k-1}{C}[r..n] + \overset{k}{C}[(r+1)..n]$$

gekommen seyn. Die Elemente, aus denen sich die Klassen bilden sollen, nehmen an Anzahl bei jeder Discerption ab; ist man endlich zur nten Discerption gekommen, oder ist in obigem Ausdrucke $r = n$, so ist er

$$n.\overset{k-1}{C}[n] + \overset{k}{C}[o]$$

im ersten Theil sind $n-1$, im andern n Elemente weggenommen, wodurch sich der zweite Theil in $\overset{k}{C}[o]$ verwandelt, welcher also wegfällt. $n.\overset{k-1}{C}[n]$ ist der letzte Theil der Recursionsformel, und deutet nur eine Form an, welche das höchste Element, n, kmal enthält. Die Totalrecursionsformel ist also:

$$\overset{k}{C}[1..n] = 1.\overset{k-1}{C}[1..n] + 2.\overset{k-1}{C}[2..n] + 3.\overset{k-1}{C}[3..n] \ldots + r.\overset{k-1}{C}[r..n] \ldots + n.\overset{k-1}{C}[n].$$

Z. B.

$$\overset{4}{C}[1..3] = 1.\overset{5}{C}[1..3] + 2.\overset{3}{C}[2..3] + 3.\overset{3}{C}[3]$$

$$
= \left\{ \begin{array}{lll}
1.\overset{3}{C}[1..3] & = & 1.111,\ 1.112,\ 1.113,\ 1.122 \\
 & & 1.123,\ 1.133,\ 1.222,\ 1223 \\
 & & 1.233,\ 1.333 \\
+\,2.\overset{3}{C}[2..3] & = & 2.222,\ 2.223,\ 2.233,\ 2.333 \\
+\,3.\overset{3}{C}[3] & = & 3.333
\end{array} \right.
$$

Ferner:

$$\overset{3}{C}[1..4] = 1.\overset{2}{C}[1..4] + 2.\overset{2}{C}[2..4] + 3.\overset{2}{C}[3,4] + 4.\overset{2}{C}[4]$$

$$
= \left\{ \begin{array}{lll}
1.\overset{2}{C}[1..4] & = & 1.11,\ 1.12,\ 1.13,\ 1.14 \\
 & & 1.22,\ 1.23,\ 1.24,\ 1.33 \\
 & & 1.34,\ 1.44 \\
+\,2.\overset{2}{C}[2..4] & = & 2.22,\ 2.23,\ 2.24,\ 2.33 \\
 & & 2.34,\ 2.44 \\
+\,3.\overset{2}{C}[3,4] & = & 3.33,\ 3.34,\ 3.44 \\
+\,4.\overset{2}{C}[4] & = & 4.44
\end{array} \right.
$$

$$\overset{5}{C}[1,2] = 1.\overset{4}{C}[1,2] + 2.\overset{4}{C}[2]$$

$$
= \left\{ \begin{array}{lll}
1.\overset{4}{C}[1,2] & = & 1.1111,\ 1.1112,\ 1.1122,\ 1.1222,\ 1.2222 \\
2.\overset{4}{C}[2] & = & 2.2222
\end{array} \right.
$$

Zerlegt man aber den Theil der partiellen Recursionsformel:

$$\overset{k}{C}[1..n] = 1.\overset{k-1}{C}[1..n] + \overset{k}{C}[2..n],$$

welcher die nächstniedrigere Klasse enthält, oder: $1.\overset{k-1}{C}[1..n]$, so erhält man zuerst:

$$1\cdot\overset{k-1}{C}[1..n] = 11\cdot\overset{k-2}{C}[1..n] + 1\cdot\overset{k-1}{C}[2..n]$$

ferner:

$$11\cdot\overset{k-2}{C}[1..n] = 111\cdot\overset{k-3}{C}[1..n] + 11\cdot\overset{k-2}{C}[2..n],$$ also zunächst:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[2..n] + 1\cdot\overset{k-1}{C}[2..n] + 11\cdot\overset{k-2}{C}[2..n] + 111\cdot\overset{k-3}{C}[1..n]$$

Man gelangt nun, wenn man fortfährt, jedesmal den Theil wieder zu zerlegen, welcher aus den Elementen $1..n$ gebildet ist, nach r solchen Zertheilungen auf:

$$1^{r-1}\overset{k-(r+1)}{C}[1..n] + 1^{r}\overset{k-r}{C}[2..n],$$

wenn 1^r andeuten soll, daß das erste Element r mal vorgesetzt werden soll. Dieser Ausdruck gehet in:

$$1^{k}\overset{0}{C}[1..n] + 1^{k-1}\overset{1}{C}[2..n]$$
$$= 1^{r-1}\overset{1}{C}[2..n] + 1^{k}$$

über, sobald $r = k-1$ wird, und dieses ist der letzte mögliche Theil der Recursionsformel:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[2..n] + 1\cdot\overset{k-1}{C}[2..n] + 1^{2}\cdot\overset{k-2}{C}[2..n] \ldots + 1^{r}\cdot\overset{k-r}{C}[2..n] \ldots$$
$$+ 1^{k}\cdot\overset{0}{C}[2..n].$$

Z. B.

$$\overset{3}{C}[1..3] = \overset{3}{C}[2,3] + 1\cdot\overset{2}{C}[2,3] + 11\cdot\overset{1}{C}[2,3] + 111\cdot\overset{0}{C}.$$

$$= \left\{\begin{array}{lcl} \overset{3}{C}[2,3] & = & 222,\ 223,\ 233,\ 333 \\ +\ 1\cdot\overset{2}{C}[2,3] & = & 1.22,\ 1.23,\ 1.33 \\ +\ 11\cdot\overset{1}{C}[2,3] & = & 11.2,\ 11.3 \\ +\ 111\cdot\overset{0}{C} & = & 111 \end{array}\right.$$

Ferner:

$$\overset{3}{C}[1..5] = \overset{4}{C}[2..5] + 1.\overset{3}{C}[2..5] + 11.\overset{2}{C}[2..5] + 111.\overset{1}{C}[2..5] + 1111.\overset{0}{C}$$

$=$

$\overset{4}{C}[2..5] =$
2222, 2223, 2224, 2225
2233, 2234, 2235, 2244
2245, 2255, 2333, 2334
2335, 2344, 2345, 2355
2444, 2445, 2455, 2555
3333, 3334, 3335, 3344
3345, 3355, 3444, 3445
3455, 3555, 4444, 4445
4455, 4555, 5555.

$+ 1.\overset{3}{C}[2..5] =$
1.222, 1.223, 1.224, 1.225
1.233, 1.234, 1.235, 1.244
1.245, 1.255, 1.333, 1.334
1.335, 1.344, 1.345, 1.355
1.444, 1.445, 1.455, 1 555.

$+ 11.\overset{2}{C}[2..5] =$
11.22, 11.23, 11.24, 11.25
11.33, 11.34, 11.35, 11.44
11.45, 11.55.

$111.\overset{1}{C}[2..5] =$ 111.2, 111.3, 111.4, 111.5.

$1111.\overset{0}{C} =$ 1111

Hätte man statt der steigenden Anordnung der Elemente die fallende befolgt, d. h. hätte man das höchste Element, n, als niedrigstes, das erste, 1, als höchstes angesehen, so hätte die partielle Recursionsformel:

$$\overset{k}{C}[1..n] = 1.\overset{k-1}{C}[1..n] + \overset{k}{C}[2..n]$$

die Gestalt

$$\overset{k}{C}[n..1] = n.\overset{k-1}{C}[n..1] + \overset{k}{C}[(n-1)..1]$$

gehabt, indessen kann man diese, durch obige Klassen-Inbegriffe angedeuteten Formen wieder umkehren, und man wird die anfänglich angenommene Anordnung wieder erhalten, (§. 16) so, daß man folgende partielle Recursionsformel hat:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k-1}{C}[1..n]n + \overset{k}{C}[1..(n-1)],$$

welche durch Nachsetzen von Elementen höhere Klassen ableitet.

Discerpirt man sie jedesmal so, daß der Theil, welcher dieselbe Klasse, k, enthält, zerlegt wird, so findet man zuerst

$$\overset{k}{C}[1..(n-1)] = \overset{k-1}{C}[1..(n-1)](n-1) + \overset{k}{C}[1..(n-2)]$$

ferner:

$$\overset{k}{C}[1..(n-2)] = \overset{k-1}{C}[1..(n-2)].(n-2) + \overset{k}{C}[1..(n-3)]$$

also:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k-1}{C}[1..n].n + \overset{k-1}{C}[1..(n-1)](n-1) + \overset{k-1}{C}[1..(n-2)](n-2) + \overset{k}{C}[1..(n-3)].$$

Man wird nach r Discerptionen auf:

$$\overset{k-1}{C}[1..(n-r)](n-r) + \overset{k}{C}[1..(n-(r+1))]$$

gekommen seyn. Ist aber $r = n-1$, so ist dieser Ausdruck

$$= \overset{k-1}{C}[1].1 + \overset{k}{C}[0] = \overset{k-1}{C}[1].1 = 1^k,$$

welcher also den letzten Theil folgender Totalrecursionsformel ausmachen wird:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k-1}{C}[1..n]\,n + \overset{k-1}{C}[1..(n-1)](n-1) + \overset{k-1}{C}[1..(n-2)](n-2)\ldots$$
$$+ \overset{k-1}{C}[1..(n-r)](n-r)\ldots \overset{k-1}{C}[1].1$$

Z. B.

$$\overset{2}{C}[1..3] = \overset{1}{C}[1..3].3 + \overset{1}{C}[1,2].2 + \overset{1}{C}[1]1$$

$$= \left\{\begin{array}{lll} & \overset{1}{C}[1..3].3 & = 1.3,\ 2.3,\ 3.3 \\ + & \overset{1}{C}[1,2].2 & = 1.2,\ 2.2 \\ + & \overset{1}{C}[1].1 & = 11 \end{array}\right.$$

Ferner:

$$\overset{3}{C}[1..4] = \overset{2}{C}[1..4].4 + \overset{2}{C}[1..3].3 + \overset{2}{C}[1,2].2 + \overset{2}{C}[1].1$$

$$= \left\{\begin{array}{lll} & \overset{2}{C}[1..4].4 & = \begin{cases} 11.4,\ 12.4,\ 13.4,\ 14.4 \\ 22.4,\ 23.4,\ 24.4,\ 33.4 \\ 34.4,\ 44.4 \end{cases} \\ + & \overset{2}{C}[1..3].3 & = \begin{cases} 11.3,\ 12.3,\ 13.3,\ 22.3 \\ 23.3,\ 33.3 \end{cases} \\ + & \overset{2}{C}[1,2].2 & = 11.2,\ 12.2,\ 22.2 \\ + & \overset{2}{C}[1].1 & = 11.1 \end{array}\right.$$

Discerpirt man nun aber den Theil der partiellen Recursionsformel:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k-1}{C}[1..n].n + \overset{k}{C}[1..(n-1)],$$

welcher die nächstniedrigere Klasse enthält, $\overset{k-1}{C}[1..n].n$, so findet man, da:

$$\overset{k-1}{C}[1..n].n = \overset{k-2}{C}[1..n].n^2 + \overset{k-1}{C}[1..(n-1)].n$$

ferner:

$$\overset{k-2}{C}[1..n].nn = \overset{k-3}{C}[1..n].n^3 + \overset{k-2}{C}[1..(n-1)].n^2$$

zunächst:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[1..(n-1)] + \overset{k-1}{C}[1..(n-1)].n + \overset{k-2}{C}[1..(n-1)].n^2 + \overset{k-3}{C}[1..n].n^3$$

Man wird, mit der Discerption fortfahrend, endlich zu

$$\overset{k-(r+1)}{C}[1..n]n^{r+1} + \overset{k-r}{C}[1..(n-1)].n^r$$

gekommen seyn, welcher Ausdruck sich in:

$$\overset{1}{C}[1..(n-1)]n^{k-1} + \overset{0}{C}[1..n]n^k$$

verwandelt, wenn man für r den Werth $k-1$ substituirt. Dieser letzte Theil, $\overset{0}{C}[1..n].n^k$ kann nun nicht ferner zertheilt werden, und man wird daher folgende Totalrecursionsformel haben:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[1..(n-1)] + \overset{k-1}{C}[1..(n-1)]n \ldots + \overset{k-r}{C}[1..(n-1)]n^r \ldots$$
$$+ \overset{0}{C}[1..(n-1)]n^k$$

Z. B.

$$\overset{2}{C}[1..3] = \overset{2}{C}[1,2] + \overset{1}{C}[1,2].3 + \overset{0}{C}.33$$

$$= \left\{ \begin{array}{rl} \overset{2}{C}[1..2] & = 11,\ 12,\ 22 \\ + \overset{1}{C}[1..2].3 & = 1.3,\ 2.3 \\ + \overset{0}{C}[1..2].33 & = 33. \end{array} \right.$$

Ferner:

$$\overset{3}{C}[1..4] = \overset{3}{C}[1..3] + \overset{2}{C}[1..3].4 + \overset{1}{C}[1..3]44 + \overset{0}{C}.444$$

$$= \begin{cases} \overset{3}{C}[1..3] = \begin{cases} 111, & 112, & 113, & 122 \\ 123, & 133, & 222, & 223 \\ 233, & 333 \end{cases} \\ + \overset{2}{C}[1..3]4 = \begin{cases} 11.4, & 12.4, & 13.4. & 22.4 \\ 23.4, & 33.4 \end{cases} \\ + \overset{1}{C}[1..3]44 = 1.44, \; 2.44, \; 3.44 \\ + \overset{0}{C}[1..3]444 = 444 \end{cases}$$

Aus der ursprünglichen partiellen Recursionsformel:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k-1}{C}[1..n]n + \overset{k}{C}[1..(n-1)]$$

folgt:

$$\overset{k}{C}[1..(n-1)] = \overset{k}{C}[1..n] - \overset{k-1}{C}[1..n]n$$

oder, wenn man statt n den Werth n+1 setzt,

$$1) \quad \overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[1..(n+1)] - \overset{k-1}{C}[1..(n+1)](n+1)$$

ferner:

$$\overset{k-1}{C}[1..n]n = \overset{k}{C}[1..n] - \overset{k}{C}[1..(n-1)]$$

d. h.

$$\overset{k-1}{C}[1..n] = \frac{\overset{k}{C}[1..n] - \overset{k}{C}[1..(n-1)]}{n}$$

oder, wenn man für k den Werth k+1 substituirt:

$$2) \quad \overset{k}{C}[1..n] = \frac{\overset{k+1}{C}[1..n] - \overset{k+1}{C}[1..(n-1)]}{n}$$

Discerpirt man den Theil der ersten Formel, welcher die um 1 niedrigere Klasse darstellt, so hat man:

$$\overset{k-1}{C}[1..(n+1)](n+1) = \overset{k-1}{C}[1..(n+2)](n+1) - \overset{k-2}{C}[1..(n+2)](n+1)(n+2)$$

ferner:

$$\overset{k-2}{C}[1..(n+2)](n+1)(n+2) = \overset{k-2}{C}[1..(n+3)](n+1)(n+2) - \overset{k-3}{C}[1..(n+3)](n+1)(n+2)(n+3)$$

also zuerst:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[1..(n+1)] - \overset{k-1}{C}[1..(n+2)](n+1) + \overset{k-2}{C}[1..(n+3)](n+1)(n+2)$$
$$- \overset{k-3}{C}[1..(n+3)](n+1)(n+2)(n+3).$$

In der Zertheilung fortfahrend, wird man nach $r$maliger Discerption auf den Ausdruck:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[1..(n+1)] - \overset{k-1}{C}[1..(n+2)](n+1) + \ldots + (-1)^r \overset{k-r}{C}[1..(n+r+1)](n+1)..$$
$$(n+r) + (-1)^{r+1} \overset{k-(r+1)}{C}[1..(n+r+1)](n+1)..(n+r+1)$$

gekommen seyn. Die Zertheilung hört auf, möglich zu seyn, sobald $r=k-1$ ist, denn alsdann sind die beiden letzten Theile:

$$(-1)^{k-1} \overset{1}{C}[1..(n+k)](n+1)..(n+k-1) + (-1)^k \overset{0}{C}[1..(n+k)](n+1)...(n+k)$$

$$= (-1)^{k-1} \overset{1}{C}[1..(n+k)](n+1)..(n+k-1) + (-1)^k (n+1)(n+2)...(n+k)$$

Man hat also folgende Totalrecursionsformel:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[1..(n+1)] - \ldots + (-1)^h \overset{k-h}{C}[1..(n+h-1)](n+1)..(n+h)\ldots$$
$$+ (-1)^k \overset{0}{C}[1..(n+k)](n+1)..(n+k).$$

Discerpirt man aber den andern Theil jener partiellen Recursionsformel, so erhält man:

$$\overset{k}{C}[1..(n+1)] = \overset{k}{C}[1..(n+2)] - \overset{k-1}{C}[1..(n+2)](n+2)$$

ferner:

$$\overset{k}{C}[1..(n+2)] = \overset{k}{C}[1..(n+3)] - \overset{k-1}{C}[1..(n+3)](n+3)$$

u. s. f. Man wird also zuerst:

$$\overset{k}{C}[1..n] = -\overset{k-1}{C}[1..(n+1)](n+1) - \overset{k-1}{C}[1..(n+2)](n+2)$$
$$- \overset{k-1}{C}[1..(n+3)](n+3) + \overset{k}{C}[1..(n+3)],$$

und allgemein nach $r-1$ Discerptionen den Ausdruck:

$$\overset{k}{C}[1..n] = -\overset{k-1}{C}[1..(n+1)](n+1) - \overset{k-1}{C}[1..(n+2)](n+2) - \ldots$$
$$- \overset{k-1}{C}[1..(n+r)](n+r) + \overset{k}{C}[1..(n+r)]$$

erhalten haben.

Die Klasse bleibt immer dieselbe, während die Anzahl der Elemente, woraus sich jene Inbegriffe erzeugen sollen, immer größer wird; man kann also bei fortgesetzter Discerption nie auf Ausdrücke stoßen, welche Unmögliches fodern, und man wird daher für ein beliebiges r folgende allgemeine Beziehung haben:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[1..(n+r)] - \overset{k-1}{C}[1..(n+1)](n+1) \ldots - \overset{k-1}{C}[1..(n+h)](n+h) \ldots$$
$$- \overset{k-1}{C}[1..(n+r)](n+r)$$

oder:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[1..(n+r)] - \overset{k-1}{C}[1..(n+r)](n+r) - \ldots$$
$$- \overset{k-1}{C}[1..(n+r-h)](n+r-h) \ldots - \overset{k-1}{C}[1..(n+1)](n+1)$$

Substituirt man für n den Werth 0, so gehet eine bekannte Beziehung aus dieser Formel hervor, denn alsdann ist:

$$\overset{k}{C}[0] = \overset{k}{C}[1..r] - \overset{k-1}{C}[1..r]r - \overset{k-1}{C}[1..(r-1)](r-1) \ldots - \overset{k-1}{C}[1..(r-h)](r-h) \ldots$$
$$- \overset{k-1}{C}[1].1$$

d. h.

$$\overset{k}{C}[1..r] = \overset{k-1}{C}[1..r]r + \overset{k-1}{C}[1..(r-1)](r-1)\ldots + \overset{k-1}{C}[1..(r-h)](r-h)\ldots + \overset{k-1}{C}[1].1$$

Unterwirft man die zweite aus der ursprünglichen partiellen Recursionsformel hervorgegangene Beziehung:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \frac{\overset{k+1}{C}[1..n] - \overset{k+1}{C}[1..(n-1)]}{n}$$

einer ferneren Discerption, indem man zuerst jedesmal den Theil zerlegt, zu dessen Erzeugung die um 1 niedrigere Anzahl von Elementen den Stoff hergiebt; so erhält man, da

$$\overset{k+1}{C}[1..(n-1)] = \frac{\overset{k+2}{C}[1..(n-1)] - \overset{k+2}{C}[1..(n-2)]}{n-1} \text{ ist,}$$

$$\overset{k}{C}[1..n] = \frac{\overset{k+1}{C}[1..n] - \dfrac{\overset{k+2}{C}[1..(n-1)] - \overset{k+2}{C}[1..(n-2)]}{(n-1)}}{n}$$

$$= \frac{\overset{k+1}{C}[1..n](n-1) - \overset{k+2}{C}[1..(n-1)] + \overset{k+2}{C}[1..(n-2)]}{n(n-1)}$$

Ferner ist:

$$\overset{k+2}{C}[1..(n-2)] = \frac{\overset{k+3}{C}[1..(n-2)] - \overset{k+3}{C}[1..(n-3)]}{n-2}$$

folglich:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \frac{\overset{k+1}{C}[1..n](n-1) - \overset{k+2}{C}[1..(n-1)] + \dfrac{\overset{k+3}{C}[1..(n-2)] - \overset{k+3}{C}[1..(n-3)]}{(n-2)}}{n.(n-1)}$$

$$= \frac{\overset{k+1}{C}[1..n](n-1)(n-2) - \overset{k+2}{C}[1..(n-1)](n-2) + \overset{k+3}{C}[1..(n-2)] - \overset{k+3}{C}[1..(n-3)]}{n.(n-1).(n-2)}$$

Man wird nach r-1 Discerptionen auf:

$$\overset{k}{C}{}'[1..n] = \frac{\overset{k+1}{C}[1..n](n-(r-1))..(n-1) - \ldots + (-1)^{h-1}\overset{k+h}{C}[1..(n-(h-1))](n-(r-1))..(n-h)\ldots + (-1)^{r-1}\overset{k+r}{C}[1..(n-(r-1))] + (-1)^{r}\overset{k+r}{C}[1..(n-r)]}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}$$

gekommen seyn, und erhält für $r = n$ endlich:

$$\overset{k}{C}{}'[1..n] = \frac{\overset{k+1}{C}[1..n]\,1.2..(n-1) - \ldots + (-1)^{h-1}\overset{k+h}{C}[1..(n-(h-1))]\,1.2..(n-h)\ldots + (-1)^{n-1}\overset{k+n}{C}[1]}{n(n-1).(n-2)\ldots 2.1}$$

Discerpirt man aber den andern Theil der Formel, so ist zuerst:

$$\overset{k+1}{C}[1..n] = \frac{\overset{k+2}{C}[1..n] - \overset{k+2}{C}[1..(n-1)]}{n}$$

folglich:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \frac{-\overset{k+1}{C}[1..(n-1) + \dfrac{\overset{k+2}{C}[1..n] - \overset{k+2}{C}[1..(n-1)]}{n}}{n}$$

$$= \frac{-\overset{k+1}{C}[1..(n-1).n - \overset{k+2}{C}[1..(n-1)] + \overset{k+2}{C}[1..n]}{n^2}$$

ferner ist:

$$\overset{k+2}{C}[1..n] = \frac{\overset{k+3}{C}[1..n] - \overset{k+3}{C}[1..(n-1)]}{n}$$

also:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \frac{-\overset{k+1}{C}[1..(n-1)].n - \overset{k+3}{C}[1..(n-1)] + \dfrac{\overset{k+3}{C}[1..n] - \overset{k+3}{C}[1..(n-1)]}{n}}{n^2}$$

$$= \frac{-\overset{k+1}{C}[1..(n-1)].n^2 - \overset{k+2}{C}[1..(n-1)].n - \overset{k+3}{C}[1..(n-1)] + \overset{k+3}{C}[1..n]}{n^3}$$

Setzt man die Zertheilungen weiter fort, so wird man endlich auf den Ausdruck:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \frac{-\overset{k+1}{C}[1..(n-1)]n^{r-1} - \overset{k+2}{C}[1..(n-1)]n^{r-2} \ldots - \overset{k+h}{C}[1..(n-1)]n^{r-h} \ldots - \overset{k+r}{C}[1..(n-2)] + \overset{k+r}{C}[1..n]}{n^r}$$ kommen.

Die Klassen-Exponenten werden mit jedem Gliede größer, während die Elemente, aus welchen jene Inbegriffe erzeugt werden sollen, immer dieselben bleiben. So lange aber Elemente vorhanden sind, so lange lassen sich Klassen-Inbegriffe erzeugen, mögen die Exponenten auch noch so groß seyn. Die Formel kann also nie abbrechen, und man hat daher für ein willkührliches r folgende Totalrecursionsformel:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \frac{\overset{k+r}{C}[1..n] - \overset{k+1}{C}[1..(n-1)]n^{r-1} \ldots - \overset{k+h}{C}[1..(n-1)]n^{r-h} \ldots - \overset{k+r}{C}[1..(n-1)]}{n^r}$$

oder auch:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \frac{\overset{k+r}{C}[1..n] - \overset{k+r}{C}[1..(n-1)] \ldots - \overset{k+r-h}{C}[1..(n-1)]n^h \ldots - \overset{k+1}{C}[1..(n-1)]n^{r-1}}{n^r}$$

Setzt man $k = 0$, so gehet eine bekannte recurrirende Beziehung hervor, denn alsdann ist:

$$\overset{0}{C}[1..n].n^r = \overset{r}{C}[1..n] - \overset{r}{C}[1..(n-1)] \ldots - \overset{r-h}{C}[1..(n-1)]n^h \ldots - \overset{1}{C}[1..(n-1)]n^{r-1}$$

d. h.

$$\overset{r}{C}[1..n] = \overset{r}{C}[1..(n-1)] + \overset{r-1}{C}[1..(n-1)]n \ldots + \overset{r-h}{C}[1..(n-1)]n^h \ldots$$
$$+ \overset{1}{C}[1..(n-1)]n^{r-1} + \overset{0}{C}[1..(n-1)]n^r$$

C. Bei bedingter Wiederholbarkeit.

§. 18.

Independentes Verfahren.

Die niedrigste Form bildet sich nach §. 4., indem man alle Stellen von der ersten an mit niedrigsten Elementen besetzt, so weit sie nemlich reichen, die übrigen aber, wenn sie vorhanden sind, mit den 2ten, so oft man darf, d. h. so oft das zweite Element wiederholt werden kann, und, sollten noch Stellen zu besetzen seyn, sie mit den dritten Elementen ausfüllt u. s. w. So ist z. B. die niedrigste Form von $\overset{5}{C}[112223]$, = 11222, die niedrigste von $\overset{6}{C}[1123344]$, = 112334 u. s. w.

Hat man, um eine Form in die nächsthöhere zu verwandeln, die spätest erhöhbare Stelle aufgesucht, in sie das nächsthöhere Element gesetzt und will nun die folgenden Stellen so niedrig als möglich ausfüllen, (§. 4.) so wird man, damit kein niedrigeres Element auf ein höheres folge, (§. 13.) die nächstfolgenden Stellen mit demselben Elemente besetzen, womit man erhöhet hat, so lange man die bedingte Wiederholbarkeit nicht verletzt, die etwa noch nachfolgenden mit dem nächsthöheren ausfüllen, so lange es nämlich wiederholbar ist u. s. w. Damit also allgemein eine Stelle erhöhbar seyn soll, muß man nicht allein ein höheres Element, als das, welches in ihr steht, in seiner Gewalt haben, sondern es müssen außerdem noch so viel nicht niedrigere Elemente vorhanden seyn, als sich Stellen hinter der zu erhöhenden vorfinden.

Sucht man also bei einer Form nach dieser Regel die spätest erhöhbare Stelle auf, erhöhet sie so wenig als möglich und besetzt die nachfolgenden Stellen nach obiger

Vorschrift, so wird man die nächsthöhere Form abgeleitet haben, und durch fortgesetzte Operation jede gefoderte Klasse erzeugen können.

3. B.

$$\overset{2}{C}[1,1,2,3,3] = 11,\ 12,\ 13,\ 23,\ 33$$

$$\overset{3}{C}[1,2,2,2,3,4.] = \begin{matrix} 122, & 123, & 124, & 134 \\ 222, & 223, & 224, & 234 \end{matrix}$$

$$\overset{4}{C}[1,1,3.4,5,5] = \begin{matrix} 1134, & 1135, & 1145, & 1155 \\ 1345, & 1355, & 1455, & 3455 \end{matrix}$$

$$\overset{5}{C}[1,1,1,2,2,3.4,4,4,5] = \begin{matrix} 111, & 112, & 113, & 114 \\ 115, & 122, & 123, & 124 \\ 125, & 134, & 135, & 144 \\ 145, & 223, & 224, & 225 \\ 234, & 235, & 244, & 245 \\ 344, & 345, & 444, & 445. \end{matrix}$$

§. 19.

Recurrirendes Verfahren.

Würde man von der niedrigsten Form das Anfangs-Element abschneiden, so bekäme man die niedrigste Form, welche sich zur nächst niedrigeren Klasse aus denselben Elementen, von denen aber das erste um einmal weniger wiederholt werden dürfte, als es anfänglich gestattet war, erzeugen läßt. Alle Stellen außer der ersten nach und nach erhöhend, bis sie so hoch als möglich besetzt waren, brachte man die erste Ordnung zu Stande, darauf erhöhete man, um die niedrigste Form der zweiten Ordnung zu bekommen, die erste Stelle mit einem zweiten Elemente, und füllte die übrigen so niedrig als möglich aus, wodurch die niedrigste Form hervorging, welche sich aus den anfänglich gegebenen Elementen außer dem ersten bilden ließ. Diese Form erhöhete man nun successiv bis zur höchsten, woraus der Inbegriff aller Combinations-

formen zur anfänglich gefoderten Klasse aus den gegebenen Elementen außer dem ersten hervorgingen. Man hat also allgemein:

$$\overset{k}{C}[\overset{\alpha}{1},\overset{\beta}{2},\ldots\overset{\rho}{r},..\overset{\pi}{p}] = 1.\overset{k-1}{C}[\overset{\alpha-1}{1},\overset{\beta}{2}..\overset{\rho}{r}..\overset{\pi}{p}] + \overset{k}{C}[\overset{\beta}{2}..\overset{\rho}{r}..\overset{\pi}{p}],$$

eine partielle Recursionsformel, welche man durch Discerption in eine totale verwandeln kann; die Ausdrücke werden jedoch sehr weitläufig und gewähren nicht einmal mäßigen Nutzen in der Analysis, weshalb wir die Operation hier nicht weiter betrachten wollen.

D. Von der independenten Darstellung einzelner Ordnungen der Combinationsklassen.

§. 20.

Durch die Recursionsformeln wird man nun auch sogleich auf eine independente Regel zur Erzeugung einzelner Ordnungen geleitet, d. h. des Inbegriffs der Formen einer Klasse, welche dasselbe Anfangs-Element haben, ja, es wird sich dadurch auch eine independente Vorschrift finden lassen, vermöge deren man alle die Formen einer Klasse erzeugen kann, welche dasselbe End-Element besitzen.

Die Combinationen bei verbotener Wiederholbarkeit der Elemente führten auf die Recursionsformel:

$$\overset{k}{C}`[1..n] = 1.\overset{k-1}{C}`[2..n] + 2.\overset{k-1}{C}`[3..n]\ldots + r.\overset{k-1}{C}`[(r+1)..n]\ldots$$
$$+ (n-k+1)\overset{k}{C}`[(n-k+2)..n]$$

wo allgemein $r.\overset{k-1}{C}`[(r+1)..n]$, weil es der einzige Inbegriff der Formen ist, welche das rte Element in der ersten Stelle führen können, die rte Ordnung bedeutet. Da man also im Stande ist, $\overset{k-1}{C}`[(r+1)..n]$ independent zu erzeugen, so wird man, indem man allen jenen Formen das rte Element vorsetzt, die rte Ordnung independent darstellen können, welches wir früher nur auf dem Wege der Recursion thun konnten.

Discerpirt man den Theil der ersten Formel, welcher die um 1 niedrigere Klasse darstellt, so hat man:

$$\overset{k-1}{C}[1..(n+1)](n+1) = \overset{k-1}{C}[1..(n+2)](n+1) - \overset{k-2}{C}[1..(n+2)](n+1)(n+2)$$

ferner:

$$\overset{k-2}{C}[1..(n+2)](n+1)(n+2) = \overset{k-2}{C}[1..(n+3)](n+1)(n+2) - \overset{k-3}{C}[1..(n+3)](n+1)(n+2)(n+3)$$

also zuerst:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[1..(n+1)] - \overset{k-1}{C}[1..(n+2)](n+1) + \overset{k-2}{C}[1..(n+3)](n+1)(n+2)$$
$$- \overset{k-3}{C}[1..(n+3)](n+1)(n+2)(n+3).$$

In der Zertheilung fortfahrend, wird man nach $r$maliger Discerption auf den Ausdruck:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[1..(n+1)] - \overset{k-1}{C}[1..(n+2)](n+1) + \ldots + (-1)^r \overset{k-r}{C}[1..(n+r+1)](n+1)..$$
$$(n+r) + (-1)^{r+1} \overset{k-(r+1)}{C}[1..(n+r+1)](n+1)..(n+r+1)$$

gekommen seyn. Die Zertheilung hört auf, möglich zu seyn, sobald $r=k-1$ ist, denn alsdann sind die beiden letzten Theile:

$$(-1)^{k-1}\overset{1}{C}[1..(n+k)](n+1)..(n+k-1) + (-1)^k \overset{0}{C}[1..(n+k)](n+1)...(n+k)$$

$$= (-1)^{k-1}\overset{1}{C}[1..(n+k)](n+1)..(n+k-1) \quad + \quad (-1)^k (n+1)(n+2)...(n+k)$$

Man hat also folgende Totalrecursionsformel:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[1..(n+1)] - \ldots + (-1)^h \overset{k-h}{C}[1..(n+h-1)](n+1)..(n+h) \ldots$$
$$+ (-1)^k \overset{0}{C}[1..(n+k)](n+1)..(n+k).$$

Discerpirt man aber den andern Theil jener partiellen Recursionsformel, so erhält man:

$$\overset{k}{C}[1..(n+1)] = \overset{k}{C}[1..(n+2)] - \overset{k-1}{C}[1..(n+2)](n+2)$$

ferner:

$$\overset{k}{C}[1..(n+2)] = \overset{k}{C}[1..(n+3)] - \overset{k-1}{C}[1..(n+3)](n+3)$$

u. s. f. Man wird also zuerst:

$$\overset{k}{C}[1..n] = -\overset{k-1}{C}[1..(n+1)](n+1) - \overset{k-1}{C}[1..(n+2)](n+2)$$
$$- \overset{k-1}{C}[1..(n+3)](n+3) + \overset{k}{C}[1..(n+3)],$$

und allgemein nach r-1 Discerptionen den Ausdruck:

$$\overset{k}{C}[1..n] = -\overset{k-1}{C}[1..(n+1)](n+1) - \overset{k-1}{C}[1..(n+2)](n+2) - \ldots$$
$$- \overset{k-1}{C}[1..(n+r)](n+r) + \overset{k}{C}[1..(n+r)]$$

erhalten haben.

Die Klasse bleibt immer dieselbe, während die Anzahl der Elemente, woraus sich jene Inbegriffe erzeugen sollen, immer größer wird; man kann also bei fortgesetzter Discerption nie auf Ausdrücke stoßen, welche Unmögliches fodern, und man wird daher für ein beliebiges r folgende allgemeine Beziehung haben:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[1..(n+r)] - \overset{k-1}{C}[1..(n+1)](n+1)\ldots - \overset{k-1}{C}[1..(n+h)](n+h)\ldots$$
$$- \overset{k-1}{C}[1..(n+r)](n+r)$$

aber:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[1..(n+r)] - \overset{k-1}{C}[1..(n+r)](n+r) - \ldots$$
$$- \overset{k-1}{C}[1..(n+r-h)](n+r-h)\ldots - \overset{k-1}{C}[1..(n+1)](n+1)$$

Substituirt man für n den Werth o, so gehet eine bekannte Beziehung aus dieser Formel hervor, denn alsdann ist:

$$\overset{k}{C}[o] = \overset{k}{C}[1..r] - \overset{k-1}{C}[1..r]r - \overset{k-1}{C}[1..(r-1)](r-1)\ldots - \overset{k-1}{C}[1..(r-h)](r-h)\ldots$$
$$- \overset{k-1}{C}[1].1$$

II. Vom Combiniren zu bestimmten Summen.

A. Von der Bildung einzelner Klassen zu vorgeschriebenen Summen.

§. 21.

Von den Combinationen zu bestimmten Summen im Allgemeinen.

Hat man aus gegebenen Elementen Combinationsformen zu irgend einer Klasse gebildet, gleichviel, bei welcher vorgeschriebenen Wiederholbarkeit, so wird jede Form, wenn man die Rangzahlen aller in ihr enthaltenen Elemente zusammenaddirt, eine gewisse Summe darbieten, und man kann die Formen der ganzen Klasse nach diesen Summen ordnen.

Die niedrigste Combinationsform wird, weil ihre successiven Stellen so niedrig besetzt sind, wie es bei keiner andern Form statt findet, die niedrigste Summe darbieten, während die höchste aus dem Grunde der höchsten Summe, welche die Klasse und die Anzahl der Elemente erlaubt, angehören wird. Unter den übrigen Formen können aber, wie man bald sehen wird, mehrere seyn, welchen dieselbe Summe zukömmt.

Z. B. bei

$$\overset{3}{C}[1..3] = \begin{matrix} 111, & 112, & 113, & 122 \\ 123, & 133, & 222, & 223 \\ 233, & 333 & & \end{matrix}$$

hat 111 die niedrigste, 333 die höchste Summe, hingegen die Formen 113, 122, sowie 123, 222, ferner 133, 223, haben dieselben Summen.

Bei den frühern Operationen haben wir die Elemente, deren Indices 0 oder negative Zahlen sind, nicht besonders betrachtet, denn, da wir nur die Folge der Elemente ins Auge faßten, so war es ganz gleichgültig, ob wir, indem wir sie zählten, um jedem der gegebenen Elemente die Zahl, welche sie dabei traf, als Rang anzuweisen, bei einer negativen Zahl anfangend, durch immer kleinere negative Zahlen fortzählten und darauf, nachdem wir bei 0 angekommen waren, in positiven Zah-

Man wird nach $r-1$ Discerptionen auf:

$$\overset{k}{C'}[1..n] =$$

$$\frac{\overset{k+1}{C}[1..n](n-(r-1))..(n-1) - \ldots + (-1)^{h-1}\overset{k+h}{C}[1..(n-(h-1))](n-(r-1))..(n-h)\ldots + (-1)^{r-1}\overset{k+r}{C}[1..(n-(r-1))] + (-1)^{r}\overset{k+r}{C}[1..(n-r)]}{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-(r-1))}$$

gekommen seyn, und erhält für $r = n$ endlich:

$$\overset{k}{C'}[1..n] = \frac{\overset{k+1}{C}[1..n]\,1.2..(n-1) - \ldots + (-1)^{h-1}\overset{k+h}{C}[1..(n-(h-1))]\,1.2..(n-h)\ldots + (-1)^{n-1}\overset{k+n}{C}[1]}{n(n-1).(n-2)\ \ldots\ 2.1}$$

Discerpirt man aber den andern Theil der Formel, so ist zuerst:

$$\overset{k+1}{C}[1..n] = \frac{\overset{k+2}{C}[1..n] - \overset{k+2}{C}[1..(n-1)]}{n}$$

folglich:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \frac{-\overset{k+1}{C}[1..(n-1) + \dfrac{\overset{k+2}{C}[1..n] - \overset{k+2}{C}[1..(n-1)]}{n}}{.\,n}$$

$$= \frac{-\overset{k+1}{C}[1..(n-1).n - \overset{k+2}{C}[1..(n-1)] + \overset{k+2}{C}[1..n]}{n^2}$$

ferner ist:

$$\overset{k+2}{C}[1..n] = \frac{\overset{k+3}{C}[1..n] - \overset{k+3}{C}[1..(n-1)]}{n}$$

also:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \frac{-\overset{k+1}{C}[1..(n-1)].n - \overset{k+3}{C}[1..(n-1)] + \frac{\overset{k+3}{C}[1..n] - \overset{k+3}{C}[1..(n-1)]}{n}}{n^2}$$

$$= \frac{-\overset{k+1}{C}[1..(n-1)].n^2 - \overset{k+2}{C}[1..(n-1)].n - \overset{k+3}{C}[1..(n-1)] + \overset{k+3}{C}[1..n]}{n^3}$$

Setzt man die Zertheilungen weiter fort, so wird man endlich auf den Ausdruck:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \frac{-\overset{k+1}{C}[1..(n-1)]n^{r-1} - \overset{k+2}{C}[1..(n-1)]n^{r-2}_{\dots} - \overset{k+h}{C}[1..(n-1)]n^{r-h}_{\dots} - \overset{k+r}{C}[1..(n-2)] + \overset{k+r}{C}[1..n]}{n^r}$$ kommen.

Die Klassen-Exponenten werden mit jedem Gliede größer, während die Elemente, aus welchen jene Inbegriffe erzeugt werden sollen, immer dieselben bleiben. So lange aber Elemente vorhanden sind, so lange lassen sich Klassen-Inbegriffe erzeugen, mögen die Exponenten auch noch so groß seyn. Die Formel kann also nie abbrechen, und man hat daher für ein willkührliches r folgende Totalrecursionsformel:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \frac{\overset{k+r}{C}[1..n] - \overset{k+1}{C}[1..(n-1)]n^{r-1}_{\dots} - \overset{k+h}{C}[1..(n-1)]n^{r-h}_{\dots} - \overset{k+r}{C}[1..(n-1)]}{n^r}$$

oder auch:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \frac{\overset{k+r}{C}[1..n] - \overset{k+r}{C}[1..(n-1)]\dots - \overset{k+r-h}{C}[1..(n-1)]n^h \dots - \overset{k+1}{C}[1..(n-1)]n^{r-1}}{n^r}$$

Setzt man $k = 0$, so gehet eine bekannte recurrirende Beziehung hervor, denn alsdann ist:

$$\overset{0}{C}[1..n].n^r = \overset{r}{C}[1..n] - \overset{r}{C}[1..(n-1)]\dots - \overset{r-h}{C}[1..(n-1)]n^h \dots - \overset{1}{C}[1..(n-1)]n^{r-1}$$

d. h.

$$\overset{r}{C}[1..n] = \overset{r}{C}[1..(n-1)] + \overset{r-1}{C}[1..(n-1)]n \ldots + \overset{r-h}{C}[1..(n-1)]n^h \ldots$$
$$+ \overset{1}{C}[1..(n-1)]n^{r-1} + \overset{0}{C}[1..(n-1)]n^r$$

C. Bei bedingter Wiederholbarkeit.

§. 18.

Independentes Verfahren.

Die niedrigste Form bildet sich nach §. 4., indem man alle Stellen von der ersten an mit niedrigsten Elementen besetzt, so weit sie nemlich reichen, die übrigen aber, wenn sie vorhanden sind, mit den 2ten, so oft man darf, d. h. so oft das zweite Element wiederholt werden kann, und, sollten noch Stellen zu besetzen seyn, sie mit den dritten Elementen ausfüllt u. s. w. So ist z. B. die niedrigste Form von $\overset{5}{C}[112223]$, = 11222, die niedrigste von $\overset{6}{C}[1123344]$, = 112334 u. s. w.

Hat man, um eine Form in die nächsthöhere zu verwandeln, die spätest erhöhbare Stelle aufgesucht, in sie das nächsthöhere Element gesetzt und will nun die folgenden Stellen so niedrig als möglich ausfüllen, (§. 4.) so wird man, damit kein niedrigeres Element auf ein höheres folge, (§. 13.) die nächstfolgenden Stellen mit demselben Elemente besetzen, womit man erhöhet hat, so lange man die bedingte Wiederholbarkeit nicht verletzt, die etwa noch nachfolgenden mit dem nächsthöheren ausfüllen, so lange es nämlich wiederholbar ist u. s. w. Damit also allgemein eine Stelle erhöhbar seyn soll, muß man nicht allein ein höheres Element, als das, welches in ihr steht, in seiner Gewalt haben, sondern es müssen außerdem noch so viel nicht niedrigere Elemente vorhanden seyn, als sich Stellen hinter der zu erhöhenden vorfinden.

Sucht man also bei einer Form nach dieser Regel die spätest erhöhbare Stelle auf, erhöhet sie so wenig als möglich und besetzt die nachfolgenden Stellen nach obiger

geben, welches sich unter den gegebenen vorfindet, und man hat demnach die niedrigste Form von ${}^{8}\overset{3}{C}'[1..4] = 134$ u. s. w.

Da jede Stelle, nachdem man sie sich mit dem nächsthöheren Elemente besetzt gedenkt, so, daß sich die folgenden mit successiv höhern Elementen ausfüllen lassen, und dadurch die gefoderte Summe erreicht werden kann, erhöhbar seyn muß, so ist es leicht, jede Form in die nächsthöhere zu verwandeln. Man sucht die späteste erhöhbare Stelle auf, erhöhet sie so wenig als möglich, und besetzt die nachfolgenden Stellen mit den successiv höhern Elementen so, als wollte man aus den zu diesem Ausfüllen vorhandenen Elementen die niedrigste Form zu der Summe bilden, welche die der schon gesetzten Elemente zur gefoderten Summe ergänzt (§. 4.). Die letzte Stelle kann also niemals erhöhbar seyn.

In der Form 1256 z. B., welche der Summe 14 angehört, wird die vorletzte Stelle nicht erhöhet werden können, denn setzt man ein sechstes Element hinein, so müßte die letzte Stelle wenigstens ein siebentes empfangen, welches aber die gefoderte Summe überträfe. Wohl aber ist die zweite Stelle erhöhbar, denn setzt man darin ein drittes Element, so kann man die folgenden Stellen höher ausfüllen, ohne daß dadurch die Summe übertroffen wird, 1346. Von dieser wird die nächsthöhere Form 2345 seyn. In einer Form, in welcher alle Elemente successiv nach einander folgen, kann keine Stelle erhöhbar seyn, denn es müßten alle folgenden Stellen gleichfalls höher besetzt werden, wodurch die gefoderte Summe überschritten würde. Dasselbe findet auch statt, wenn mehrere Stellen bis zur letzten mit Elementen besetzt sind, welche im Range successiv auf einander folgen. Hat man nun irgend eine Stelle erhöhet, die folgenden mit successiv höheren Elementen besetzt, und der letzten Stelle das Element ertheilt, welches die verlangte Summe ergänzt, so wird diese letzte Stelle meistens sehr in der Höhe des in ihr befindlichen Elements von der nächstniedrigeren abweichen; alsdann kann man aber die vorletzte Stelle erhöhen, indem man das letzte höhere Element um eine Einheit verringert. Dieses dauert so lange, bis die letzte Stelle entweder um eine oder um zwei Einheiten noch höher besetzt ist als die vorletzte, denn im ersten Falle würde, wenn die vorletzte Stelle noch um 1 erhöhet, also die letzte um 1 erniedrigt wird, diese niedriger seyn, als jene, welches wider

die Annahme im §. 16. wäre, im zweiten Falle würden beide Stellen gleiche Elemente bekommen, welches gegen die Voraussetzung der verbotenen Wiederholbarkeit seyn würde.

Nach diesen independenten Regeln bildet sich nun leicht:

${}^{12}\overset{3}{C}'[1..6] = 156,\ 246,\ 345.$

${}^{7}\overset{2}{C}'[0..7] = 07,\ 16,\ 25,\ 34.$

${}^{11}\overset{3}{C}'[0..9] = 029,\ 038,\ 047,\ 056$
$128,\ 137,\ 146,\ 236$
245

${}^{10}\overset{3}{C}'[1..7] = 127,\ 136,\ 145,\ 235.$

${}^{6}\overset{3}{C}'[-2..8] = -208,\ -217,\ -226,\ -235$
$-107,\ -116,\ -125,\ -134$
$015,\ 024,\ 123$

${}^{8}\overset{4}{C}'[-3..9] = -3\text{-}249,\ -3\text{-}258,\ -3\text{-}267,\ -3\text{-}139,$
$-3\text{-}148,\ -3\text{-}157,\ -3029,\ -3038$
$-3047,\ -3056,\ -3128,\ -3137$
$-3146,\ -3236,\ -3245,\ -2\text{-}129$
$-2\text{-}138,\ -2\text{-}147,\ -2\text{-}156,\ -2019$
$-2028,\ -2037,\ -2046,\ -2127$
$-2136,\ -2145,\ -2235,\ -1018$
$-1027,\ -1036,\ -1045,\ -1126$
$-1135,\ -1234,\ 0125,\ 0134$

${}^{7}\overset{3}{C}'[1..] = 124$

${}^{9}\overset{4}{C}'[1..]$, ${}^{5}\overset{3}{C}'[1..]$, ${}^{10}\overset{2}{C}'[1..4]$, ${}^{12}\overset{1}{C}'[1..8]$, ${}^{14}\overset{3}{C}'[1..5]$ u. s. w. sind Unmögliches fodernde Ausdrücke.

§. 23.

Recurrirendes Verfahren.

Wenn man in der niedrigsten Form das erste Element abschneidet, so wird man eine Form der nächstniedrigeren Klasse erhalten, welche einer Summe angehört, die um so viel niedriger ist, als die anfängliche, als das erste Element Einheiten in sich begreift, und aus denselben Elementen außer dem niedrigsten gebildet ist; da aber in ihr alle Stellen so niedrig als möglich besetzt sind, so wird man auch in dieser Form die niedrigste haben, welche sich aus jenen Elementen zu dieser Klasse und Summe bilden läßt. Man erhöhete nun die niedrigste Form nach und nach, indem man alle folgenden Stellen successiv so hoch besetzte, als es möglich war, ehe man die erste zur Erhöhung zog, d. h. man bildete, um die niedrigste Ordnung zu erhalten, alle Formen der nächstniedrigeren Klasse, aus den gegebenen Elementen außer dem ersten, zu einer Summe, welche der anfänglichen weniger so viel Einheiten, als das niedrigste Element in sich begreift, gleich ist, und setzte diesen Formen jenes niedrigste Element vor. Wird also $^{n}\overset{k}{C}'[q..]$ verlangt, wo q und n positiv oder negativ seyn können, so ist die niedrigste Ordnung $= {}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}'[(q+1)..]$.

Nachdem nun alle folgenden Stellen so hoch als möglich besetzt waren, d. h. nachdem die niedrigste Ordnung vollständig gebildet war, erhöhete man die erste Stelle, indem man ihr das nächsthöhere Element ertheilte, und besetzte alle folgenden Stellen so niedrig als möglich, d. h. man leitete, indem man die niedrigste Form der nächsthöheren Ordnung bildete, die niedrigste Form ab, die sich, aus jenen Elementen außer dem niedrigsten, zur anfänglich gefoderten Summe und Klasse erzeugen ließ. Diese Form erhöhete man nun nach und nach, bis alle Stellen möglichst hoch besetzt waren, d. h. man bildete den Inbegriff aller Formen zur gefoderten Summe und Klasse aus den gegebenen Elementen, von denen aber das niedrigste weggenommen war. Der zweite Inbegriff von $^{n}\overset{k}{C}'[q..]$ ist mithin $= {}^{n}\overset{k}{C}'[(q+1)..]$, und man hat also folgende partielle Recursionsformel:

$$^{n}\overset{k}{C}'[q..] = {}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}[(q+1)..] + {}^{n}\overset{k}{C}'[(q+1)..]$$

Discerpirt man nach dieser Regel den zweiten Theil, ${}^{n}\overset{k}{C}`[(q+1)..]$, so ist

$$ {}^{n}\overset{k}{C}`[(q+1)..] = {}^{n-(q+1)}_{\quad(q+1).}\overset{k-1}{C}`[(q+2)..] + {}^{n}\overset{k}{C}`[(q+2)..] $$

Ferner:

$$ {}^{n}\overset{k}{C}`[(q+2)..] = {}^{n-(q+2)}_{\quad(q+2).}\overset{k-1}{C}`[(q+3)..] + {}^{n}\overset{k}{C}`[(q+3)..] $$

also zunächst:

$$ {}^{n}\overset{k}{C}`[q..1] = {}^{n-q}_{\quad q.}\overset{k-1}{C}`[(q+1)..] + {}^{n-(q+1)}_{\quad(q+1).}\overset{k-1}{C}`[(q+2)..] $$
$$ + {}^{n-(q+2)}_{\quad(q+2).}\overset{k-1}{C}`[(q+3)..] + {}^{n}\overset{k}{C}`[(q+3)..] $$

Man wird allgemein bei der hten Discerption auf

$$ {}^{n-(q+h)}_{\quad(q+h).}\overset{k-1}{C}`[(q+h+1)..] + {}^{n}\overset{k}{C}`[(q+h+1)..] $$

gekommen seyn, es soll untersucht werden, wie groß h höchstens seyn darf, oder, wie weit man die Discerption fortsetzen muß, um die vollständige Recursionsformel zu erhalten. Der Summen-Exponent nimmt immer mehr und mehr ab, während die Elemente immer höher und höher werden, man muß also endlich dahin gelangen, daß die niedrigsten Elemente, an Zahl so viel, als der Klassen-Exponent anzeigt, größer sind, als die Summe, in welchem Falle der Ausdruck Unmögliches fodert. Die Summe der Elemente:

$$ (q+h+1),\ (q+h+2),\ \ldots\ (q+h+(k-1)) $$

darf nicht größer seyn, als $n-(q+h)$. Da nun die Summe jener Elemente, wie aus der Elementar-Arithmetik bekannt, $= (q+h).(k-1) + \frac{k.(k-1)}{2}$ ist, so darf bei jener Recursionsformel $(q+h).(k-1) + \frac{k.(k-1)}{2}$ nicht größer seyn, als $n-(q+h)$, woraus durch eine kleine Umformung klar ist, daß h nicht größer, als $\frac{n}{k} - \frac{k-1}{2} - q$ seyn darf.

Man hat also folgende Recursionsformel:

$$ {}^{n}\overset{k}{C}`[q..] = {}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}`[(q+1)..] + {}^{n-(q+1)}_{(q+1).}\overset{k-1}{C}`[(q+2)..]\ldots $$

$$ {}^{n-(q+h)}_{(q+h).}\overset{k-1}{C}`[(q+h+1)..]\ldots $$

wobei man das letzte Glied nach obiger Bedingung in jedem Specialfalle bestimmen kann. Z. B.

$$ {}^{10}\overset{3}{C}`[0..] = {}^{10}_{0.}\overset{2}{C}`[1..] + {}^{9}_{1.}\overset{2}{C}`[2..] + {}^{8}_{2.}\overset{2}{C}`[3..]. $$

$$ = \left\{ \begin{array}{l} {}^{10}_{0.}\overset{2}{C}`[1..] = 0.19,\ 0.28,\ 0.37,\ 0.46 \\ + {}^{9}_{1.}\overset{2}{C}`[2..] = 1.27,\ 1.36,\ 1.45 \\ + {}^{8}_{2.}\overset{2}{C}`[3..] = 2.35 \end{array} \right. $$

Ferner:

$$ {}^{6}\overset{5}{C}[-2..] = {}^{8}_{-2.}\overset{2}{C}`[-1..] + {}^{7}_{-1.}\overset{2}{C}`[0..] + {}^{6}_{0.}\overset{2}{C}`[1..] + {}^{5}_{1.}\overset{2}{C}`[2..] $$

$$ = \left\{ \begin{array}{l} {}^{8}_{-2.}\overset{2}{C}`[-1..] = -2.-19,\ -208,\ -217,\ -226,\ -2.35. \\ {}^{7}_{-1.}\overset{2}{C}`[0..] = -1.07,\ -1.16,\ -1.25,\ -1.34 \\ {}^{6}_{0.}\overset{2}{C}`[1..] = 0.15,\ 0.24 \\ {}^{5}_{1.}\overset{2}{C}[2..] = 1.23 \end{array} \right. $$

Durch Discerption des andern Theils der partiellen Recursionsformel wird man auf verwickeltere Ausdrücke gerathen, besonders möchte die Bestimmung des letzten Gliedes der daraus entstehenden Totalrecursionsformel, welche in der Analysis wohl nicht leicht gefodert werden dürfte, und zur recurrirenden Darstellung der Formen selbst zu complicirt ist, für die meisten meiner Leser zu schwierig seyn, als daß sie hier einen Platz finden sollte. Das hte Glied dieser Recursionsformel ist der

Inbegriff aller Combinationsformen zur Klasse $k-h$ und Summe $n-\left[hq+\frac{h.(h-1)}{2}\right]$ aus den Elementen $(q+h+1)$, $(q+h+2)\ldots r$ denen die Elemente q, $(q+1)$, ... $(q+h-1)$ vorgesetzt sind.

2. Bei unbedingter Wiederholbarkeit.

§. 24.

Independentes Verfahren.

Die niedrigste Form bildet sich natürlich dadurch, daß man alle Stellen von der ersten an mit dem niedrigsten Elemente besetzt, indem man der letzten Stelle dasjenige Element ertheilt, welches die Summe der gesetzten niedrigsten Elemente zur gefoderten Summe ergänzt. Ist ein so hohes nicht vorhanden, so wird man die nächstniedrigere Stelle hinlänglich erhöhen, und, im Fall dazu ein so hohes Element fehlen sollte, zur Erhöhung der dritten Stelle von der höchsten übergehen müssen, u. s. f. bis sich die gefoderte Summe darbietet.

Damit also die Operation überhaupt möglich sey, ist nöthig, daß die Summe von dem niedrigsten Elemente so viel mal genommen, als die Klasse anzeigt, nicht schon übertroffen werde, dann, daß auch das höchste Element, so viel mal genommen, als die Klasse Einheiten in sich faßt, nicht kleiner sey, als die gefoderte Summe, d. h. wenn q das niedrigste, $q+r$ das höchste Element, n die Summe und k die Klasse ist, daß n nicht kleiner, als kq, und nicht größer ist, als $k(q+r)$.

Die niedrigste Form von ${}^{10}\overset{5}{C}[r..4]$ würde 11116 seyn, wenn ein sechstes Element vorhanden wäre, man wird also, nachdem man der 5ten Stelle das höchste Element, 4, gegeben hat, die 4te Stelle mit einem dritten Elemente besetzen müssen, damit die gefoderte Summe hervorgehe; die niedrigste Form von jenem Inbegriffe ist also 11134.

Wenn man sich eine Stelle einer gewissen Form mit einem höheren Elemente besetzt gedenkt, und im Stande ist, die folgenden Stellen mit nicht niedrigeren Elementen auszufüllen, so, daß dadurch die gefoderte Summe hervorgehet, so wird jene

Stelle erhöhbar seyn. Um von einer Form die nächsthöhere abzuleiten, wird man in ihre spätest erhöhbare Stelle ein so wenig als möglich höheres Element setzen, die nachfolgenden Stellen so lange wie möglich mit demselben Elemente besetzen, und nur den letzten Stellen, wenn es nöthig ist, höhere Elemente ertheilen, damit die gefoderte Summe hervorgehe. Dabei muß natürlich sehr oft der Fall vorkommen, daß man der letzten Stelle ein um mehrere Einheiten höheres Element ertheilt, als der vorletzten, welche letztere hiedurch jedesmal erhöhbar wird. Diese erhöhet man alsdann, als die spätest erhöhbare Stelle, successiv, indem man die letzte Stelle nach und nach erniedrigt, welche Operation so lange fortdauern muß, bis entweder beide Elemente einander gleich sind, oder bis das letzte noch um 1 höher im Range ist, als das vorletzte; denn wollte man noch weiter gehen, so würde das letzte Element niedriger seyn, als das vorletzte, welches wider die Annahme der Rangfolge der Elemente in den Combinationsformen wäre.

Die nächsthöhere Form von 1224, welche zu ${}^{9}\overset{4}{C}[1..5]$ gehören mag, ist 1233, die nächsthöhere von dieser wird 2223 seyn u. s. w. Es bilden sich nun z. B.

${}^{5}\overset{3}{C}[1..3]$ = 113, 122.

${}^{9}\overset{4}{C}[1..5]$ = 1125, 1134, 1224, 1233, 2223.

${}^{3}\overset{4}{C}[0..3]$ = 0003, 0012, 0111

${}^{1}\overset{3}{C}[-3..]$ = —3-37, —3-26, —3-15, —304
—313, —322, —2-25, —2-14
—203, —212, —1-13, —102
—111, 001

${}^{-2}\overset{2}{C}[-4..2]$ = —42, —31, —20, —1-1

${}^{0}\overset{3}{C}[-3..]$ = —3-36, —3-25, —3-14, —303
—312, —2-24, —2-13, —202
—211, —1-12, —101, 000

${}^{-1}\overset{4}{C}[-3..5]$ = —3-305, —3-314, —3-323, —3-2-15
—3-204, —3-213, —3-222, —3-1-14
—3-103, —3-112, —3002, —3011
—2-2-25, —2-2-14, —2-203, —2-212
—2-1-13, —2-102, —2-111, —2001
—1-1-12, —1-101, —1000.

${}^{8}\overset{4}{C}[-1..9]$ = —1-119, —1-128, —1-137, —1-146
—1-155, —1009, —1018, —1027
—1036, —1045, —1117, —1126
—1135, —1144, —1225, —1234
—1333, 0008, 0017, 0026
0035, 0044, 0116, 0125
0134, 0224, 0233, 1115
1124, 1133, 1223, 2222.

${}^{2}\overset{3}{C}[-3..]$ = —3-38, —3-27, —3-16, —305
—314, —323, —2-26, —2-15
—204, —213, —222, —1-14
—103, —112, 002, 011.

§. 26.

Recurrirendes Verfahren.

Nimmt man die einfachere Voraussetzung an, daß die Elemente unbestimmt fortlaufen, so bildet die niedrigste Form von ${}^{n}\overset{k}{C}[q..]$, wenn von ihr das erste Element, q, abgeschnitten ist, die niedrigste Form von ${}^{n-q}\overset{k-1}{C}[q..]$ dar, denn in ihr sind alle Stellen von der ersten bis zur höchsten so niedrig als möglich besetzt. Um bei der independenten Erzeugung die niedrigste Ordnung zu erhalten, erhöhete

man alle Stellen nach der ersten so lange, bis sie so hoch als möglich besetzt waren, d. h. bis man jene niedrigste Form von ${}^{n-q}\overset{k-1}{C}[q..]$ nach und nach bis zur höchsten erhöhet hatte. Die niedrigste Ordnung von ${}^{n}\overset{k}{C}[q..]$ ist also ${}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}[q..]$. Man erhöhete darauf die erste Stelle mit dem Elemente $q+1$, und besetzte die folgenden successiv so niedrig als möglich, d. h. man bildete die niedrigste Form zur vorgeschriebenen Klasse k und Summe n aus den Elementen $(q+1)\ldots$. Da man nun diese Form nach und nach wieder erhöhete, bis alle Stellen successiv so hoch besetzt waren wie möglich, so ist klar, daß man den ganzen Inbegriff der Formen zur anfänglich gefoderten Summe und Klasse aus den gegebenen Elementen außer dem niedrigsten bildete, und daß ${}^{n}\overset{k}{C}[q..r]$ aus den beiden Theilen ${}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}[q..]$ und ${}^{n}\overset{k}{C}[(q+1)..]$ bestehe. Man hat also folgende partielle Recursionsformel zur Bildung der Combinationsformen zu bestimmten Summen, bei unbedingt gestatteter Wiederholbarkeit der Elemente:

$$ {}^{n}\overset{k}{C}[q..] = {}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}[q..] + {}^{n}\overset{k}{C}[(q+1)..] $$

Wendet man diese Regel der Zertheilung auf den zweiten Theil ${}^{n}\overset{k}{C}[(q+1)..]$ an, so ist:

$$ {}^{n}\overset{k}{C}[(q+1)..] = {}^{n-(q+1)}_{(q+1).}\overset{k-1}{C}[(q+1)..] + {}^{n}\overset{k}{C}[(q+2)..] $$

Ferner ist:

$$ {}^{n}\overset{k}{C}[(q+2)..] = {}^{n-(q+2)}_{(q+2)}\overset{k-1}{C}[(q+2)..] + {}^{n}\overset{k}{C}[(q+3)..] $$

also hat man zunächst:

$$ {}^{n}\overset{k}{C}[q..] = {}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}[q..] + {}^{n-(q+1)}_{(q+1)}\overset{k-1}{C}[(q+1)..] + {}^{n-(q+2)}_{(q+2)}\overset{k-1}{C}[(q+2)..] + {}^{n}\overset{k}{C}[(q+3)..] $$

Fährt man mit der Discerption weiter fort, so wird man nach der hten auf:

$$ {}^{n-(q+h)}_{(q+h)}\overset{k-1}{C}[(q+h)..] + {}^{n}\overset{k}{C}[(q+h+1)..] $$

gekommen seyn, es soll untersucht werden, wie groß h höchstens seyn darf, oder welches Glied der Recursion das letzte ist. Die Summe nimmt bei jedem Gliede um 1 ab, während bei jedem folgenden Gliede um 1 höhere Elemente als die niedrigsten erscheinen. So lange nun das niedrigste der Elemente, welche zur Bildung des Formen-Inbegriffs ${}^{n-(q+h)}_{(q+h)}\overset{k-1}{C}[(q+h)..]$ beitragen sollen, d. h. $q+h$ so oft mal gesetzt, als die Klasse $k-1$ anzeigt, die Summe $n-(q+h)$ nicht übertrifft, d. h. so lange $(k-1).(q+h)$ oder $k(q+h)-(q+h)$ nicht größer ist, als $n-(q+h)$, oder so lange h nicht größer, als $\frac{n}{k}-q$ ist, so lange ist das Glied der Recursionsformel reell. Es kann also h eine jede positive ganze Zahl bedeuten, welche nicht größer ist, als $\frac{n}{k}-q$, soll es daher die größeste Zahl unter dieser Voraussetzung seyn, so fällt das Glied ${}^{n}\overset{k}{C}[(q+h+1)]$ weg, weil alsdann $k(q+h+1) > $ ist, als n. und man hat folgende Recursionsformel:

$$ {}^{n}\overset{k}{C}[q..] = {}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}[(q..1)..] + {}^{n-(q+1)}_{(q+1).}\overset{k-1}{C}[(q+1)..]... $$
$$ + {}^{n-(q+r)}_{(q+r)}\overset{k-1}{C}[(q+r)..]... + {}^{n-(q+h)}_{(q+h)}\overset{k-1}{C}[(q+h)..] $$

Z. B.

$$ {}^{9}\overset{4}{C}[1..] = {}^{8}_{1.}\overset{3}{C}[1..] + {}^{7}_{2.}\overset{3}{C}[2..] $$

$$ = \begin{cases} {}^{8}_{1.}\overset{3}{C}[1..] = 1.116,\ 1.125,\ 1.134,\ 1.224,\ 1.233 \\ + {}^{7}_{2.}\overset{3}{C}[2..] = 2.223 \end{cases} $$

Ferner:

$$ {}^{10}\overset{3}{C}[1..] = {}^{9}_{1.}\overset{2}{C}[1..] + {}^{8}_{2.}\overset{2}{C}[2..] + {}^{7}_{3.}\overset{2}{C}[3..] $$

$$ = \begin{cases} {}^{9}_{1.}\overset{2}{C}[1..] = 1.18,\ 1.27,\ 1.36,\ 1.45 \\ + {}^{8}_{2.}\overset{2}{C}[2..] = 2.26,\ 2.35,\ 2.44 \\ + {}^{7}_{3.}\overset{2}{C}[3..] = 3.34 \end{cases} $$

$$ {}^{5}\overset{3}{C}[-3..] = {}^{6}_{-3.}\overset{2}{C}[-3..] + {}^{5}_{-2.}\overset{2}{C}[-2..] + {}^{4}_{-1.}\overset{2}{C}[-1..] + {}^{3}_{0.}\overset{2}{C}[0..] + {}^{2}_{1.}\overset{2}{C}[1..] $$

$$ = \begin{cases} {}^{6}_{-3.}\overset{2}{C}[-3..] = -3.-39,\ -3.-28,\ -3.-17,\ -3.06 \\ \qquad -3.15,\ -3.24,\ -3.33 \\ {}^{5}_{-2.}\overset{2}{C}[-2..] = -2.-27,\ -2.-16,\ -2.05,\ -2.14,\ -2.23 \\ {}^{4}_{-1.}\overset{2}{C}[-1..] = -1.-15,\ -1.04,\ -1.13,\ -1.22 \\ {}^{3}_{0.}\overset{2}{C}[0..] = 0.03,\ 0.12 \\ {}^{2}_{1.}\overset{2}{C}[1..] = 1.11 \end{cases} $$

$$ {}^{-2}\overset{4}{C}[-2..] = {}^{0}_{-2.}\overset{3}{C}[-2..] + {}^{-1}_{-1.}\overset{3}{C}[-1..] $$

$$ = \begin{cases} {}^{6}_{-2.}\overset{3}{C}[-2..] = -2.-2-24,\ -2.-2-13,\ -2.-202,\ -2.211 \\ \qquad -2.-1-12,\ -2.-101,\ -2.000 \\ {}^{-1}_{-1.}\overset{3}{C}[-1..] = -1.-1-12,\ -1.-100 \end{cases} $$

$$ {}^{0}\overset{3}{C}[-2..] = {}^{\;2}_{-2.}\overset{2}{C}[-2..] + {}^{\;1}_{-1.}\overset{2}{C}[-1..] + {}^{0}_{0.}\overset{2}{C}[0..] $$

$$ = \left\{ \begin{array}{l} {}^{\;2}_{-2}\overset{2}{C}[-2..] = -2.-24,\ -2.-13,\ -2.02,\ -2.11 \\ {}^{\;1}_{-1.}\overset{2}{C}[-1..] = -1.-12,\ -1.01 \\ {}^{0}_{0}\overset{2}{C}[0..] = 0.00 \end{array} \right. $$

Für $q = 1$ verwandelt sich also die Recursionsformel in

$$ {}^{n}\overset{k}{C}[1..] = {}^{n-1}_{1.}\overset{k-1}{C}[1..] + {}^{n-2}_{2.}\overset{k-1}{C}[2..] \,..\, {}^{n-r}_{r}\overset{k-1}{C}[..r] \,..\, {}^{n-h}_{h.}\overset{k-1}{C}[h..] $$

wobei $h-1$ also nicht größer, als $\frac{n}{k} - 1$, oder h nicht größer, als $\frac{n}{k}$ seyn darf.

Discerpirt man den Theil der partiellen Recursionsformel:

$$ {}^{n}\overset{k}{C}[q..] = {}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}[q..] + {}^{n}_{.}\overset{k}{C}[(q+1)..], $$

welcher die nächstniedrigere Klasse in sich enthält, so ist, weil:

$$ {}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}[q..] = {}^{n-2q}_{qq.}\overset{k-2}{C}[q..] + {}^{n-q}_{q}\overset{k-1}{C}[(q+1)..] $$

ferner:

$$ {}^{n-2q}_{qq}\overset{k-2}{C}[q..] = {}^{n-3q.}_{qqq}\overset{k-3}{C}[q..] + {}^{n-2q}_{qq}\overset{k-2}{C}[(q+1)..] $$

zunächst:

$$ {}^{n}\overset{k}{C}[q..] = {}^{n}\overset{k}{C}[(q+1)..] + {}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}[(q+1)..] + {}^{n-2q}_{qq}\overset{k-2}{C}[(q+1)..] $$
$$ + {}^{n-3q}_{qqq}\overset{k-3}{C}[q..] $$

Fährt man mit der Discerption weiter fort, so wird man aus der hten:

$$ {}^{n-hq}_{q^{h.}}\overset{k-h}{C}[(q+1)..] + {}^{n-(h+1)q}_{q^{h+1.}}\overset{k-(h+1)}{C}[q..] $$

erhalten haben. Die Klassen und Summen nehmen also mit jedem Gliede ab, indem die Elemente dieselben bleiben, es soll untersucht werden, ob die Glieder bis zur ersten

und oten Klasse reell bleiben, oder ob sie schon früher verschwinden können. In dem Falle, in welchem $kq = n$ ist, gehet nur eine Form hervor, welche dieses niedrigste Element, q, $k$mal enthält, sollen jedoch der Formen mehrere entstehen, so ist nöthig, daß $n > kq$; alsdann ist aber $n-(k-1)q > q$. Da sich nun der obige zweitheilige Ausdruck, wenn man darin statt h den Werth $k-1$ setzt, in

$$ {}^{n-(k-1)q}\underset{q^{k-1}}{\overset{1}{C}}[(q+1)\ldots] + {}^{n-kq}\underset{q^{k}}{\overset{0}{C}}[q\ldots] $$

verwandelt, und da $n-(k-1)q > q$, so daß sich $n-(k-1)q$ in der Reihe der Elemente $(q+1)$, $(q+2)$, ... befindet, so ist

$$ {}^{n-(k-1)q}\underset{q^{k-1}}{\overset{1}{C}}[(q+1)\ldots] $$

jedesmal reell, während ${}^{n-kq}\underset{q^{k}}{\overset{0}{C}}[q\ldots]$ als Unmögliches fodernder Ausdruck, (unbesetzte Stellen können keine Summe geben) wegfällt. Wenn nun aber auch $n > kq$, so kann doch n kleiner seyn, als $k(q+1)$, in welchem Falle das erste Glied der Recursionsformel, ${}^{n}\overset{k}{C}[(q+1)\ldots]$, und vielleicht noch mehrere nachfolgende unmöglich werden, es soll untersucht werden, welches Glied alsdann zuerst wieder reell wird.

Es sey $n+m = k(p+1)$, so, daß also zu der Größe n noch m Einheiten hinzugelegt werden müßten, ehe sie die Größe $k.(q+1)$ erreichte. Im zweiten Gliede ist das niedrigste Element so viel mal genommen, wie der Klassen-Exponent anzeigt, $= (k-1)(p+1) = k(p+1)-p-1$, die Summe aber $= n-p$, woraus zu ersehen ist, daß hier die Differenz schon um 1 kleiner ist, als bei dem ersten Gliede. Beim hten ist das niedrigste Glied so viel mal genommen, als der Klassen-Exponent anzeigt, $= (k-h).(q+1) = k(q+1)-hq-h$, die Summe aber $= n-hq$, und es folgt hieraus, daß sich der Unterschied zwischen n und $k(q+1)$, welchen wir m genannt haben, schon um h Einheiten verringert hat. Beim mten Gliede wird also $n = k(q+1)$, d. h. das mte ist das erste reelle Glied jener Recursionsformel, wenn in dem Ausdrucke ${}^{n}\overset{k}{C}[q\ldots]$, $k(q+1) > n$. Nun ist aber $m = k.(q+1)-n$, woraus man sogleich das erste reelle Glied finden kann.

Man hat also die Recursionsformel:

$${}^{n}\overset{k}{C}[q..] = {}^{n}\overset{k}{C}[(q+1)..] + {}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}[(q+1)..] \ldots {}^{n-hq}_{q^{h}.}\overset{k-h}{C}[(q+1)..] \ldots$$

$$+ {}^{n-(k-1)q}_{q^{k-1}.}\overset{1}{C}[(q+1)..].$$

worin, falls $k(q+1) > n$, das Glied das erste reelle ist, welches zum Klassen-Exponenten $k-(k(q+1)-n)$ hat.

Schreibt man jedoch diese Recursionsformel umgekehrt, so hat man den Vortheil, daß man jedesmal bei reellen Gliedern anfängt. Es ist demnach:

$${}^{n}\overset{k}{C}[q..] = {}^{n-(k-1)q}_{q^{k-1}.}\overset{1}{C}[(q+1)..] + {}^{n-(k-2)q}_{q^{k-2}.}\overset{2}{C}[(q+1)..] \ldots$$

$${}^{n-(k-h)q}_{q^{k-h}.}\overset{k}{C}[(q+1)..] \ldots + {}^{n}\overset{k}{C}[(q+1)..]$$

Danach ist z. B.

$${}^{8}\overset{3}{C}[1..] = {}^{6}_{11}\overset{1}{C}[2..] + {}^{7}_{1.}\overset{2}{C}[2..] + {}^{8}\overset{3}{C}[2..]$$

$$= \left\{ \begin{array}{lcl} {}^{6}_{11.}\overset{1}{C}[2..] & = & 11.6 \\ + {}^{7}_{1.}\overset{2}{C}[2..] & = & 1.25, \quad 1.34 \\ + {}^{8}\overset{3}{C}[2..] & = & 224, \quad 233 \end{array} \right.$$

$${}^{0}\overset{4}{C}[-3..] = {}^{9}_{-3-3-3}\overset{1}{C}[-2..] + {}^{6}_{-3-3}\overset{2}{C}[-2..] + {}^{3}_{-3}\overset{3}{C}[-2..] + {}^{0}\overset{4}{C}[-2..]$$

$$= \left\{ \begin{array}{lcl} {}^{9}_{-3-3-3.}\overset{1}{C}[-2..] & = & -3\,3-3.9 \\ + {}^{6}_{-3-3.}\overset{2}{C}[-2..] & = & -3-3.-28, \; -3-3.-17, \; -3-3.06, \; -3-3.15 \\ & & -3-3.24, \; -3-3.33 \\ + {}^{3}_{-3.}\overset{3}{C}[-2..] & = & -3.-2-27, \; -3.-2-16, \; -3.-205, \; -3.-214 \\ & & -3.-223, \; -3.-1-15, \; -3.-104, \; -3.-113 \\ & & -3.-122, \; -3.003, \; -3.012, \; -3.111 \\ + {}^{0}\overset{4}{C}[-2..] & = & -2-2-26, \; -2-2-15, \; -2-204, \; -2-213 \\ & & -2-222, \; -2-1-14, \; -2-103, \; -2-112 \\ & & -2002, \; -2011, \; -1-1-13, \; -1-102 \\ & & -1-111, \; -1001, \; 0000. \end{array} \right.$$

$${}^{3}\overset{3}{C}[-3..] = {}_{-3.-3}^{\;\;9}\overset{1}{C}[-2..] + {}_{-3}^{6}\overset{2}{C}[-2..] + {}^{3}\overset{3}{C}'[-2..]$$

$$= \begin{cases} {}_{-3.-3}^{\;\;9}\overset{1}{C}[-2..] = -3\text{-}3.9 \\ {}_{-3.}^{6}\overset{2}{C}[-2..] = -3.\text{-}28,\ -3\,17,\ -3.06,\ -3.15 \\ \qquad\qquad -3.24,\ -3.33 \\ {}^{3}\overset{3}{C}[-2..] = -2\text{-}27,\ -2\text{-}16,\ -205,\ -214 \\ \qquad\qquad -223,\ -1\text{-}15,\ -104,\ -113 \\ \qquad\qquad -122,\ 003,\ 012,\ 111 \end{cases}$$

$${}^{-7}\overset{3}{C}[-3..] = {}_{-3.-3}^{\;\;-1}\overset{1}{C}[-2..] + {}_{-3.}^{-4}\overset{2}{C}[-2..]$$

$$= \begin{cases} {}_{-3.-3}^{\;\;-1}\overset{1}{C}[-2..] = -3\text{-}3.\text{-}1 \\ + {}_{-3.}^{-4}\overset{2}{C}[-2..] = -3.\text{-}2\text{-}2. \end{cases}$$

3. Von der independenten Bestimmung einzelner Ordnungen aus den Inbegriffen der Combinationsformen zu bestimmten Summen.

§. 26.

Aus der Totalrecursionsformel (im §. 23):

$${}^{n}\overset{k}{C}'[q..] = {}^{n-q}_{\;\;q.}\overset{k-1}{C}'[(q+1)..] + {}^{n-(q+1)}_{\;\;(q+1)}\overset{k-1}{C}'[(q+2)..]\ldots$$
$$+ {}^{n-(q+h)}_{\;\;(q+h).}\overset{k-1}{C}'[(q+h+1)..]\ldots$$

folgt, daß das hte Glied nach dem anfänglichen die hte Ordnung nach der anfänglichen von ${}^{n}\overset{k}{C}'[q..]$ darstelle, denn nur diese Formen führen das $q+h$te Element an der Spitze. Der Ausdruck ${}^{n-(q+h)}_{\;\;(q+h)}\overset{k-1}{C}'[(q+h+1)..]$ ist also die inde

pendente Auflösung der Aufgabe, aus $^{n}\overset{k}{C}`[q..]$ allgemein die hte Ordnung nach der anfänglichen, oder die, deren Formen mit $q+h$ anfangen, zu erzeugen. Z. B. es wird verlangt, aus $^{6}\overset{3}{C}`[-2..]$ die zweite Ordnung nach der anfänglichen, oder die, deren Formen mit o anfangen, independent zu bilden, so ist sie $= {}^{6}_{0.}\overset{2}{C}`[1..]$ $=$ 0.15, 0.24.

Würde ferner die erste Ordnung nach der anfänglichen aus $^{11}\overset{3}{C}`[0..]$ verlangt, so ist sie

$$= {}^{10}_{1.}\overset{2}{C}`[2..] = 1.28,\ 1.37,\ 1.46$$

u. s. w.

Aus der Totalrecursionsformel:

$$^{n}\overset{k}{C}[q..] = {}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}[q..] + {}^{n-(q+1)}_{(q+1)}\overset{k-1}{C}[(q+1)..].. + {}^{n-(q+h)}_{(q+h)}\overset{k-(k+1)}{C}[(q+h)..]...$$

folgt, daß die hte Ordnung nach der anfänglichen aus $^{n}\overset{k}{C}[q..]$

$$= {}^{n-(q+h)}_{(q+h)}\overset{k-1}{C}[(q+h)..]$$

sey, wonach es z. B. leicht ist, die zweite Ordnung nach der anfänglichen aus $^{3}\overset{3}{C}[-3..]$ independent zu bilden, sie ist:

$$= {}^{4.}_{-1.}\overset{2}{C}[-1..] = -1.-15,\ -1.04,\ -1.13,\ -1.22$$

Ferner ist z. B. die erste Ordnung nach der anfänglichen aus $^{8}\overset{4}{C}[-1..]$

$$= {}^{8}_{0.}\overset{3}{C}[0..] = \begin{matrix} 0.008, & 0.017, & 0.026, & 0.035 \\ 0.044, & 0.116, & 0.125, & 0.134 \\ 0.224, & 0.233 & & \end{matrix}$$

u. s. w.

man alle Stellen nach der ersten so lange, bis sie so hoch als möglich besetzt waren, d. h. bis man jene niedrigste Form von ${}^{n-q}\overset{k-1}{C}[q..]$ nach und nach bis zur höchsten erhöhet hatte. Die niedrigste Ordnung von ${}^{n}\overset{k}{C}[q..]$ ist also ${}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}[q..]$. Man erhöhete darauf die erste Stelle mit dem Elemente $q+1$, und besetzte die folgenden successiv so niedrig als möglich, d. h. man bildete die niedrigste Form zur vorgeschriebenen Klasse k und Summe n aus den Elementen $(q+1)\ldots$. Da man nun diese Form nach und nach wieder erhöhete, bis alle Stellen successiv so hoch besetzt waren wie möglich, so ist klar, daß man den ganzen Inbegriff der Formen zur anfänglich gefoderten Summe und Klasse aus den gegebenen Elementen außer dem niedrigsten bildete, und daß ${}^{n}\overset{k}{C}[q..r]$ aus den beiden Theilen ${}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}[q..]$ und ${}^{n}\overset{k}{C}[(q+1)..]$ bestehe. Man hat also folgende partielle Recursionsformel zur Bildung der Combinationsformen zu bestimmten Summen, bei unbedingt gestatteter Wiederholbarkeit der Elemente:

$${}^{n}\overset{k}{C}[q..] = {}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}[q..] + {}^{n}\overset{k}{C}[(q+1)..]$$

Wendet man diese Regel der Zertheilung auf den zweiten Theil ${}^{n}\overset{k}{C}[(q+1)..]$ an, so ist:

$${}^{n}\overset{k}{C}[(q+1)..] = {}^{n-(q+1)}_{(q+1).}\overset{k-1}{C}[(q+1)..] + {}^{n}\overset{k}{C}[(q+2)..]$$

Ferner ist:

$${}^{n}\overset{k}{C}[(q+2)..] = {}^{n-(q+2)}_{(q+2)}\overset{k-1}{C}[(q+2)..] + {}^{n}\overset{k}{C}[(q+3)..]$$

also hat man zunächst:

$${}^{n}\overset{k}{C}[q..] = {}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}[q..] + {}^{n-(q+1)}_{(q+1)}\overset{k-1}{C}[(q+1)..] + {}^{n-(q+2)}_{(q+2)}\overset{k-1}{C}[(q+2)..] + {}^{n}\overset{k}{C}[(q+3)..]$$

Fährt man mit der Discerption weiter fort, so wird man nach der hten auf:

$$ {}^{n-(q+h)}_{(q+h)}\overset{k-1}{C}[(q+h)..] + {}^{n}\overset{k}{C}[(q+h+1)..] $$

gekommen seyn, es soll untersucht werden, wie groß h höchstens seyn darf, oder welches Glied der Recursion das letzte ist. Die Summe nimmt bei jedem Gliede um 1 ab, während bei jedem folgenden Gliede um 1 höhere Elemente als die niedrigsten erscheinen. So lange nun das niedrigste der Elemente, welche zur Bildung des Formen-Inbegriffs ${}^{n-(q+h)}_{(q+h)}\overset{k-1}{C}[(q+h)..]$ beitragen sollen, d. h. $q+h$ so oft mal gesetzt, als die Klasse $k-1$ anzeigt, die Summe $n-(q+h)$ nicht übertrifft, d. h. so lange $(k-1).(q+h)$ oder $k(q+h)-(q+h)$ nicht größer ist, als $n-(q+h)$, oder so lange h nicht größer, als $\frac{n}{k} - q$ ist, so lange ist das Glied der Recursionsformel reell. Es kann also h eine jede positive ganze Zahl bedeuten, welche nicht größer ist, als $\frac{n}{k} - q$, soll es daher die größeste Zahl unter dieser Voraussetzung seyn, so fällt das Glied ${}^{n}\overset{k}{C}[(q+h+1)]$ weg, weil alsdann $k(q+h+1) >$ ist, als n. und man hat folgende Recursionsformel:

$$ {}^{n}\overset{k}{C}[q..] = {}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}[(q..1)..] + {}^{n-(q+1)}_{(q+1).}\overset{k-1}{C}[(q+1)..]... $$
$$ + {}^{n-(q+r)}_{(q+r)}\overset{k-1}{C}[(q+r)..]... + {}^{n-(q+h)}_{(q+h)}\overset{k-1}{C}[(q+h)..] $$

Z. B.

$$ {}^{9}\overset{4}{C}[1..] = {}^{8}_{1.}\overset{3}{C}[1..] + {}^{7}_{2.}\overset{3}{C}[2..] $$

$$ = \left\{ \begin{array}{l} {}^{8}_{1.}\overset{3}{C}[1..] = 1.116, \quad 1.125, \quad 1.134, \quad 1.224, \quad 1.233 \\ + {}^{7}_{2.}\overset{3}{C}[2..] = 2.223 \end{array} \right. $$

nur, daß diese Stellen so niedrig als möglich ausgefüllt werden, welches offenbar geschiehet, wenn man dasselbe Element, womit man erhöhete, so oft hinter die erhöhete Stelle setzt, bis die gefoderte Summe dargestellt ist. Fehlt endlich noch ein kleineres Element an der Summe, so darf man dieses nicht hinter die höheren Elemente setzen, weil dadurch der Annahme der Rangfolge bei den Combinationsformen zuwider gehandelt würde, sondern man wird es zur letzten der gleich besetzten Stellen rechnen, indem man das Element in derselben um so viel noch erhöhet. Alsdann hat man alle Stellen nach der anfänglichen so niedrig besetzt, als es unter diesen Umständen möglich war. Ist die Summe nicht so groß, daß man mehrere Stellen nach der erhöheten mit demselben Elemente, womit man erhöhete, besetzen kann, so wird man also das Element, welches die Summe ergänzt, sogleich in die nachfolgende Stelle setzen; wenn es noch größer ist, als das, womit man erhöhete, oder es sogleich zu diesem Elemente rechnen, wenn es niedriger seyn sollte. Hieraus ist nun aber klar, daß die vorletzte Stelle jedesmal erhöhbar sey.

Der Gang des Verfahrens ist also folgender: um eine Form in die nächsthöhere zu verwandeln, setze man in die vorletzte Stelle das nächsthöhere Element, und fülle folgende Stellen so lange mit eben demselben Elemente aus, bis die Summe ergänzt ist, wobei jedoch die letzte Stelle ein höheres Element bekommen kann. War das letzte Element der zu erhöhenden Form nicht so hoch, als daß man, bevor das Ergänzungs-Element gesetzt wurde, mehrere Stellen mit demselben Elemente ausfüllen konnte, so wird jenes Ergänzungs-Element gleich die folgende Stelle treffen müssen, in welchem Falle das vorletzte Element um 1 erhöhet, das letzte um 1 erniedrigt wird. Ist endlich das letzte Element der zu erhöhenden Form eben so groß, oder noch um 1 größer, als das vorletzte, so wird man sogleich dieses zu jenem rechnen, und die vorletzte Stelle mit einem Elemente = der Summe dieser beiden, besetzen müssen. Dieses Erhöhen der vorletzten Stelle wird so lange fortdauern, bis keine vorletzte Stelle mehr vorhanden ist, d. h. bis die Form nur aus einem, dem höchsten, Elemente besteht. Z. B.

$$^{5}C\,[1..] = 11111,\ 1112,\ 113,\ 122$$
$$14,\ 23,\ 5.$$

$^{6}C[1..]$ = 111111, 11112, 1113, 1122
114, 123, 15, 222
24, 33, 6.

$^{7}C[1..]$ = 1111111, 111112, 11113, 11122
1114, 1123, 115, 1222
124, 133, 16, 223
25, 34, 7.

$^{8}C[1..]$ = 11111111, 1111112, 111113, 111122
11114, 11123, 1115, 11222
1124, 1133, 116, 1223
125, 134, 17, 2222
224, 233, 26, 35
44, 8.

§. 32.

Recurrirendes Verfahren.

Die niedrigste Form besteht immer aus so viel ersten Elementen, als die Summe anzeigt, nimmt man also das erste Element davon weg, so behält man die niedrigste Form, welche zur nächstvorhergehenden Summe aus denselben Elementen gebildet werden kann. Man erhöhete nun, bevor man die erste Stelle zur Erhöhung zog, alle nachfolgenden Stellen nach und nach, bis es unter diesen Elementen kein nachfolgendes mehr gab, d. h. bis man jene nachfolgenden Stellen so hoch als möglich besetzt hatte. Der Inbegriff aller Formen also, welche das niedrigste Element an der Spitze führen, ist nichts anders, als der Inbegriff aller Klassen, die zur nächstniedrigeren Summe hervorgehen können, deren sämmtlichen Formen das erste Element vorgesetzt ist. Indem man nun, in der independenten Erzeugung fortfahrend, die erste Stelle mit einem zweiten Elemente besetzt hatte, füllte man die nachfolgenden mit gleichen Elementen aus, der letzten das Ergänzungs-Element ertheilend, d. h. man bildete die niedrigste Form, welche sich zu der anfänglich gefoderten Summe aus den

gegebenen Elementen, außer dem ersten, erzeugen läßt. Diese Form erhöhete man nun, bis es kein nachfolgendes Element mehr gab, oder bis die höchste Form durch Erhöhung der Stellen hervorgegangen war. Dieser zweite Theil ist also der Inbegriff aller Klassen, welche zur vorgeschriebenen Summe aus den gegebenen Elementen außer dem niedrigsten erzeugt werden können. ${}^{n}C[1..]$ bestehet also aus den beiden Theilen: ${}^{n-1}_{1.}C[1..]$ und ${}^{n}C[2..]$ so, daß man also die partielle Recursionsformel hat:

$${}^{n}C[1..] = {}^{n-1}_{1.}C[1..] + {}^{n}C[2..].$$

Da nun aber

$${}^{n}C[2..] = {}^{n-2}_{2.}C[2..] + {}^{n}C[3..],$$

ferner:

$${}^{n}C[3..] = {}^{n-3}_{3.}C[3..] + {}^{n}C[4..] \text{ u. s. f.}$$

so ist klar, daß man allgemein nach r Discerptionen auf einen Ausdruck:

$${}^{n}C[1..] = {}^{n-1}_{1.}C[1..] + {}^{n-2}_{2.}C[2..] + {}^{n-3}_{3.}C[3..]\ldots + {}^{n-r}_{r.}C[r..] + {}^{n}C[(r+1)..]$$

kommen muß. Die Summe nimmt bei jedem Gliede ab, während die Elemente immer größer werden. So lange nun das niedrigste Element noch nicht größer ist, als die Summe, so lange sind die Glieder reell, sind aber die Elemente alle größer, als die gefoderte Summe, so kann nicht einmal die erste, also auch keine folgende Klasse möglich seyn. Das letzte mögliche Glied ist das, worin $r = \frac{1}{2}n$ ist, so wie r größer wird, gehet die Unmöglichkeit der Foderung an. Ist daher n eine paare Zahl, $= 2p$, so darf r höchstens $= p$ seyn, und der Ausdruck ${}^{n}_{p.}C[p..]$ ist $= pp$ ist n eine unpaare Zahl, $= 2p+1$, so darf r nicht zu $p+1$ werden, weil es mehr beträgt, als die Hälfte von $2p+1$, es kann hier höchstens ein ptes Glied geben, wie oben. Der letzte Theil ${}^{n}C[(r+1)..]$ ist aber jedesmal möglich, denn n kömmt in der Reihe der Elemente $(r+1)$, $(r+2)\ldots$ vor. Da nun aber das niedrigste Element in diesem Ausdrucke, $(r+1)$, mehr ist, als $\frac{1}{2}n$, so kann dasselbe, und um so mehr die folgenden, mehrmal gesetzt, die Summe n nicht hervorbringen,

${}^{n}C[(r+1)..]$ kann also nicht aus Formen von mehreren Elementen bestehen, und da es nur ein Element unter (r+1), (r+2)... giebt, welches im Range so hoch ist, als n, so ist der letzte Theil der Recursionsformel immer das Element, welches im Range mit der vorgeschriebenen Summe übereinkommt, für sich als Form gesetzt.

Man hat folglich die Totalrecursionsformel:

$$^{2n}C[1..] = {}^{2n-1}_{1.}C[1..] + {}^{2n-2}_{2.}C[2..]... + {}^{2n-r}_{r.}C[r..]... + {}^{n}_{n.}C[n..] + 2n.$$

oder:

$$^{2n+1}C[1..] = {}^{2n}_{1.}C[1..] + {}^{2n-1}_{2.}C[2..]... + {}^{2n-(r-1)}_{r}C[r..]... + {}^{n+1}_{n.}C[n..] + (2n+1)$$

Darnach bildet sich z. B.

$$^{4}C[1..] = {}^{3}_{1}C[1..] + {}^{2}_{2.}C[2..] + 4$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} {}^{3}_{1.}C[1..] = 1.111,\ 1.12,\ 1.3 \\ + {}^{2}_{2.}C[2..] = 2.2 \\ + \quad 4 = 4 \end{array} \right.$$

$$^{7}C[1..] = {}^{6}_{1.}C[1..] + {}^{5}_{2.}C[2..] + {}^{4}_{3.}C[3..] + 7$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} + {}^{6}_{1.}C[1..] = \left\{ \begin{array}{l} 1.111111,\ 1.11112,\ 1.1113,\ 1.1122 \\ 1.114,\ 1.123,\ 1.15,\ 1.222 \\ 1.24,\ 1.33,\ 1.6 \end{array} \right. \\ + {}^{5}_{2.}C[2..] = 2.23,\ 2.5 \\ + {}^{4}_{3.}C[3..] = 3.4 \\ + \quad 7 = 7 \end{array} \right.$$

Discerpirt man aber den Theil der partiellen Recursionsformel:

$$^{n}C[1..] = {}^{n}C[2..] + {}^{n-1}_{1.}C[1..],$$

welcher dieselbe Summe darstellt, ${}^{n}C[2..]$, so ist zunächst, da

$$^{n-1}_{1.}C[1..] = {}^{n-1}_{1.}C[2..] + {}^{n-2}_{11.}C[1..],$$

ferner:

$$ {}^{n-2}_{II.}C[1..] = {}^{n-2}_{II}C[2..] + {}^{n-3}_{III}C[1..], $$

$$ {}^{n}C[1..] = {}^{n}C[2..] + {}^{n-1}_{I.}C[2..] + {}^{n-2}_{II.}C[2..] + {}^{n-3}_{III.}C[1..] $$

Man kömmt bei der rten Discerption auf:

$$ {}^{n-r}_{1^r}C[2..] + {}^{n-(r+1)}_{1^{r+1}}C[1..] $$

wovon der erste Theil immer möglich seyn muß, sobald n−r nicht kleiner ist als 2, es darf also n−r höchstens = 2, d. h. r = n−2 werden, alsdann ist dieser Theil

$$ = {}^{2}_{1^{n-2}}C[2..] $$

und der letzte, bei der n−2ten Discerption noch übrig gebliebene Theil ist

$$ = {}^{1}_{1^{n-1}}C[1..] = 1^n $$

Man hat folglich folgende Totalrecursionsformel:

$$ {}^{n}C[1..] = {}^{n}C[2..] + {}^{n-1}_{1}C[2..] + {}^{n-2}_{II}C[2..] \ldots + {}^{n-r}_{1^r}C[2..] \ldots + {}^{2}_{1^{n-2}}C[2..] + 1^n $$

woraus sich folgende specielle Fälle leicht ergeben:

$$ {}^{5}C[1..] = {}^{5}C[2..] + {}^{4}_{I.}C[2..] + {}^{3}_{II.}C[2..] + {}^{2}_{III.}C[2..] + 11111 $$

$$ = \left\{ \begin{array}{rcl} {}^{5}C[2..] & = & 23,\ 5 \\ + {}^{4}_{I.}C[2..] & = & 1.22,\ 1.4 \\ + {}^{3}_{II.}C[2..] & = & 11.3 \\ + {}^{2}_{III.}C[2..] & = & 111.2 \\ + \quad 11111 & = & 11111 \end{array} \right. $$

$$ {}^{6}C[1..] = {}^{6}C[2..] + {}^{5}_{I.}C[2..] + {}^{4}_{II}C[2..] + {}^{3}_{III}C[2..] + {}^{2}_{IIII}C[2..] + 111111 $$

$$ = \left\{ \begin{array}{rcl} {}^{6}C[2..] & = & 222,\ 24,\ 33,\ 6 \\ + {}^{5}_{I.}C[2..] & = & 1.23,\ 1.5 \\ + {}^{4}_{II.}C[2..] & = & 11.22,\ 11.4 \\ + {}^{3}_{III.}C[2..] & = & 111.3 \\ + {}^{2}_{IIII.}C[2..] & = & 1111.2 \\ + \quad 111111 & = & 111111 \end{array} \right. $$

Von den combinatorischen Operationen, insofern sie auf mehrere Elementenreihen Bezug haben.

§. 33.

Vom Variiren im Allgemeinen.

Es sind mehrere verschiedene Elementenreihen gegeben, man soll aus den Elementen aller dieser Reihen Zusammenstellungen bilden. Daß hier mehrere, theils zu sehr verwickelten Operationen Veranlassung gebende Annahmen gemacht werden können, erhellet auf den ersten Anblick; man hat sich jedoch bis jetzt nur mit der einfachen Voraussetzung begnügt, nach welcher zur Erzeugung einer Form jede Reihe eins ihrer Elemente hergiebt, eine Annahme, welche zu Resultaten führt, ohne die die Analysis wohl nie zu dem Grade der Vollkommenheit gelangt wäre, in welchem sie sich gegenwärtig befindet.

Die Elemente der ersten Reihe mögen durch $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots \overset{x}{a} \ldots$, die der zweiten durch $\overset{1}{b}, \overset{2}{b}, \overset{3}{b} \ldots \overset{r}{b} \ldots$, allgemein, die der nten Reihe durch $\overset{1}{n}, \overset{2}{n}, \overset{3}{n} \ldots \overset{r}{n} \ldots$ bezeichnet werden, so, daß also der Stoff zur Bildung der Variationsformen folgendes Schema hat:

$$\begin{array}{l} \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a} \ldots \overset{r}{a} \ldots \\ \overset{1}{b}, \overset{2}{b}, \overset{3}{b} \ldots \overset{r}{b} \ldots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overset{1}{n}, \overset{2}{n}, \overset{3}{n} \ldots \overset{r}{n} \ldots \end{array}$$

Der Definition der Operation gemäß kömmt es auf die Folge der Elemente in den Complexionen durchaus nicht an; hat man z. B. aus den Reihen:

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{a},\ \overset{3}{a},\ \overset{4}{a}$$

$$\overset{1}{b},\ \overset{2}{b},\ \overset{3}{b},\ \overset{4}{b}$$

$$\overset{1}{c},\ \overset{2}{c},\ \overset{3}{c},\ \overset{4}{c}$$

eine Complexion $\overset{1}{a}, \overset{3}{b}, \overset{4}{c}$ gebildet, so ist es ganz einerlei, ob sie diese Gestalt habe, oder ob man sie $\overset{1}{a}\,\overset{4}{c}\,\overset{3}{b}$ oder $\overset{3}{b}\,\overset{1}{a}\,\overset{4}{c}$ u. s. w. schreibt, denn die Form besteht immer aus dem ersten Elemente der ersten Reihe, aus dem 3ten der zweiten und aus dem 4ten der dritten Reihe. Aber in den Complexionen muß eine Ordnung herrschen, wenn man überhaupt höhere Formen von niedrigeren unterscheiden, d. h. auf einem independenten Wege das Gefoderte zur Darstellung bringen will.

In jeder Complexion kommt ein Element aus jeder der gegebenen Reihen vor, wenn man also die Elemente in ihnen jedesmal so ordnet, und es wird das Einfachste seyn, daß nie ein Element einer höheren Reihe einem einer niedrigeren vorangeht, so ist klar, daß die Formen in gleichen Stellen Elemente aus ein und denselben Reihen enthalten werden. In der ersten Stelle wird jedesmal ein Element der ersten Reihe, in der zweiten Stelle ein Element der zweiten Reihe, allgemein in der kten Stelle stets ein Element zu stehen kommen, welches aus der kten Reihe genommen ist, d. h. es wird in der ersten Stelle jeder Complexion immer ein a, in der zweiten ein b, allgemein in der kten ein k stehen. Aber hieraus entsteht eine Bequemlichkeit in der Bezeichnung, denn wenn die Stelle in der Form schon die Reihe anzeigt, aus welcher das in ihr stehende Element genommen ist, so wird es nur nöthig seyn, die Zahl in sie zu setzen, welche den Rang des Elements in der Reihe angiebt, aus der diese Stelle Elemente annehmen kann. Man hat daher nicht nöthig, die Buchstaben mit ihren Anzeigern zu schreiben, sondern, wie bei den frühern Operationen, nur die letztern selbst. Soll man z. B. aus obigem Beispiele das 3te Element der ersten, das erste der zweiten und das vierte der dritten Reihe zu einer Form vereinigen, so wird diese 314 seyn.

Nach dieser Abkürzung in der Bezeichnung ist es nun also nicht mehr einerlei, wie die Folge der Anzeiger in den Variationscomplexionen statt findet. Allerdings wird bei dieser Operation nur Verschiedenheit des Inhalts gefodert, so, daß $\overset{1}{a}, \overset{3}{b}, \overset{4}{c}$ mit $\overset{4}{c}, \overset{1}{a}, \overset{3}{b}$ völlig einerlei ist, bedient man sich aber nur der Anzeiger, nach der oben festgesetzten Ordnung, so bedeuten 123, 321, 312, u. s. w. ganz verschiedene Formen, denn die erste ist $\overset{1}{a}\ \overset{2}{b}\ \overset{3}{c}$, die zweite $\overset{3}{a}\ \overset{2}{b}\ \overset{1}{c}$, die dritte $\overset{3}{a}\ \overset{1}{b}\ \overset{2}{c}$.

Man kann nun beim Variiren zwei Voraussetzungen machen, entweder die Reihen enthalten vollständig alle Elemente vom ersten an ununterbrochen bis zur bestimmten Höhe, oder es sind in ihnen Lücken vorhanden. Die allgemeinen Regeln der Erzeugung müssen sich jedoch immer gleich bleiben, die Reihen mögen gestaltet seyn, wie man will.

I. Vom Variiren an sich.

A. Von der Bildung der Variationsformen aus vollständigen Reihen.

§. 34.

Independentes Verfahren.

Die niedrigste Form entstehet, wenn alle Stellen so niedrig als möglich besetzt sind, d. h. zu deren Bildung jede Reihe ihr niedrigstes Element hergegeben hat. Jede Stelle muß erhöhbar seyn, wenn die Reihe, aus welcher sie Elemente annimmt, noch höhere Elemente besitzt, als das, welches in jener Stelle steht. Hat man nun, um eine Form in die nächsthöhere zu verwandeln, die spätest erhöhbare Stelle möglichst wenig erhöhet, und will die folgenden Stellen so niedrig als möglich ausfüllen, so geschieht dies offenbar nur dadurch, daß jede der Reihen, aus welcher die folgenden Stellen Elemente annehmen können, dazu ihr niedrigstes Element hergiebt, d. h. daß alle nachfolgenden Stellen mit niedrigsten Elementen besetzt werden. Hat man z. B. aus 3 Reihen, wovon jede 4 Elemente besitzt, eine Form 244 gebildet, so wird nur

die erste Stelle erhöhbar seyn, weil die zweite und dritte Reihe kein 5tes Element haben, womit sie ihren Stellen Stoff zur Erhöhung darbieten könnten; die erste Reihe wird ihrer Stelle ein drittes Element geben, und demnach die nächsthöhere Form 311 seyn.

Man bedient sich, um den Inbegriff aller Variationsformen anzudeuten, des Zeichens V., und setzt die Zahl, welche die Menge der vorhandenen Reihen anzeigt, da sie auch zugleich Klassen-Exponent ist über dasselbe, den allen diesen Reihen gemeinschaftlichen Index aber in einer Klammer hinter dasselbe, so, daß allgemein der Inbegriff aller Variationscomplexionen, welche sich aus k Reihen, deren jede n Elemente enthält, darstellen lassen, durch das Zeichen $\overset{k}{V}[1..n]$ repräsentirt wird.

Nach diesen indepenten Regeln der Erzeugung ist z. B.

$\overset{2}{V}[1..3]$ = 11, 12, 13, 21
22, 23, 31, 32
33.

$\overset{3}{V}[1,2]$ = 111, 112, 121, 122
211, 212, 221, 222.

$\overset{4}{V}[1]$ = 1111.

$\overset{3}{V}[1..4]$ = 111, 112, 113, 114
121, 122, 123, 124
131, 132, 133, 134
141, 142, 143, 144
211, 212, 213, 214
221, 222, 223, 224
231, 232, 233, 234
241, 242, 243, 244
311, 312, 313, 314
321, 322, 323, 324

331, 332, 333, 334
341, 342, 343, 344
411, 412, 413, 414
421, 422, 423, 424
431, 432, 433, 434
441, 442, 443, 444.

§. 35.

Recurrirendes Verfahren.

Die niedrigste Form enthielt nur erste Elemente, schneidet man also das der
Stelle ab, so bleibt die niedrigste Form der nächstniedrigeren Klasse oder aus
gebenen Elementenreihen außer der ersten gebildet, übrig. Man erhöhete nun
enden Stellen nach der ersten nach und nach, bis keine derselben mehr eine
ng vertrug, ehe man diese angriff, d. h. man bildete, um die erste Ordnung
lten, alle Variationsformen aus den gegebenen Reihen außer der ersten, und
nen das erste Element der ersten Reihe vor. Indem man darauf die erste
mit einem zweiten Elemente erhöhete, besetzte man die übrigen wieder mit
ten Elementen, welche man darauf wieder so lange erhöhete, bis sie so hoch
lich besetzt waren. Die zweite Ordnung ist also der Inbegriff aller Formen
gegebenen Reihen außer der ersten, denen man das zweite Element der ersten
orgesetzt hat. Allgemein, indem man die erste Stelle mit einem rten Elemente
, um die niedrigste Form der Ordnung r hervorzubringen, füllte man alle
enden Stellen mit ersten Elementen aus, welche man darauf, ehe man zur
Ordnung überging, nach und nach so hoch als möglich besetzen mußte. Die
nung ist also allgemein der Inbegriff aller Variationsformen aus den gegebe-
ihen außer der ersten, denen das rte Element der ersten Reihe vorgesetzt ist.
chste Ordnung muß natürlich die nte seyn, wenn die Reihen n Elemente
n.

Man hat also folgende Totalrecursionsformel:

$$\overset{k}{V}[1..n] = 1.\overset{k-1}{V}[1..n] + 2.\overset{k-1}{V}[1..n] + \ldots + r.\overset{k-1}{V}[1..n] \ldots + n.\overset{k-1}{V}[1..n]$$

Wollte man die sämtlichen Variationsformen, welche aus gegebenen Reihen hervorgehen können, rückwärts lesen, oder sie umkehren, so, daß die letzte Stelle zur ersten, diese zur letzten wird, so würde man alle die Variationsformen lesen, welche aus denselben Reihen, nur in umgekehrter Ordnung genommen, gebildet werden können.

Hat man nun aber k Reihen, jede von n Elementen, und betrachtet die kte als niedrigste, die erste als höchste, so hat man, wie oben:

$$\overset{k}{V}[1..n] = 1.\overset{k-1}{V}[1..n] + 2.\overset{k-1}{V}[1..n] \ldots + r\overset{k-1}{V}[1..n] \ldots + n.\overset{k-1}{V}[1..n].$$

Ließt man aber alle diese Formen rückwärts, so hat man bei $\overset{k}{V}[1..n]$, wie es anfänglich angenommen wurde, die erste Reihe als niedrigste, die kte als höchste betrachtet, und es ist:

$$\overset{k}{V}[1..n] = \overset{k-1}{V}[1..n]1 + \overset{k-1}{V}[1..n]2 \ldots + \overset{k-1}{V}[1..n].r. \ldots + \overset{k-1}{V}[1..n].n$$

eine Recursionsformel, welche durch Nachsetzen der Elemente der kten Reihe an die Formen der k-1ten Klasse, die kte Klasse abzuleiten lehrt.

Nach der ersten recurrirenden Regel ist z. B.

$$\overset{4}{V}[1..3] = 1.\overset{3}{V}[1..3] + 2.\overset{3}{V}[1..3] + 3.\overset{3}{V}[1..3]$$

$=$

$1.\overset{3}{V}[1..3] =$ 1.111, 1.112, 1.113, 1.121
1.122, 1.123, 1.131, 1.132
1.133, 1.211, 1.212, 1.213
1.221, 1.222, 1.223, 1.231
1.232, 1.233, 1.311, 1.312
1.313, 1.321, 1.322, 1.323
1.331, 1.332, 1.333

$+ 2.\overset{3}{V}[1..3] =$ 2.111, 2.112, 2.113, 2.121
2.122, 2.123, 2.131, 2.132
2.133, 2.211, 2.212, 2.213
2.221, 2.222, 2.223, 2.231
2.232, 2.233, 2.311, 2.312
2.313, 2.321, 2.322, 2.323
2.331, 2.332, 2.333

$+ 3.\overset{3}{V}[1..3] =$ 3.111, 3.112, 3.113, 3.121
3.122, 3.123, 3.131, 3.132
3.133, 3.211, 3.212, 3.213
3.221, 3.222, 3.223, 3.231
3.232, 3.233, 3.311, 3.312
3.313, 3.321, 3.322, 3.323
3.331, 3.332, 3.333

$$\overset{3}{V}[1..4] = 1.\overset{2}{V}[1..4] + 2.\overset{2}{V}[1..4] + 3.\overset{2}{V}[1..4] + 4.\overset{2}{V}[1..4]$$

$$= \left\{\begin{array}{rcl}
1.\overset{2}{V}[1..4] & = & 1.11,\ 1.12,\ 1.13,\ 1.14 \\
 & & 1.21,\ 1.22,\ 1.23,\ 1.24 \\
 & & 1.31,\ 1.32,\ 1.33,\ 1.34 \\
 & & 1.41,\ 1.42,\ 1.43,\ 1.44 \\
+\ 2.\overset{2}{V}[1..4] & = & 2.11,\ 2.12,\ 2.13,\ 2.14 \ \text{u. s. w} \\
+\ 3.\overset{2}{V}[1..4] & = & 3.11,\ 3.12 \ \text{u. s. w.} \\
+\ 4.\overset{2}{V}[1..4] & = & 4.11,\ 4.12 \ \text{u. s. w.}
\end{array}\right.$$

$$\overset{2}{V}[1..5] = 1.\overset{1}{V}[1..5] + 2.\overset{1}{V}[1..5] + 3.\overset{1}{V}[1..5] + 4.\overset{1}{V}[1..5] + 5.\overset{1}{V}[1..5]$$

$$= \left\{\begin{array}{rcl}
1.\overset{1}{V}[1..5] & = & 1.1,\ 1.2,\ 1.3,\ 1.4,\ 1.5 \\
+\ 2.\overset{1}{V}[1..5] & = & 2.1,\ 2.2,\ 2.3,\ 2.4,\ 2.5 \\
+\ 3.\overset{1}{V}[1..5] & = & 3.1,\ 3.2,\ 3.3,\ 3.4,\ 3.5 \\
+\ 4.\overset{1}{V}[1..5] & = & 4.1,\ 4.2,\ 4.3,\ 4.4,\ 4.5 \\
+\ 5.\overset{1}{V}[1..5] & = & 5.1,\ 5.2,\ 5.3,\ 5.4,\ 5.5
\end{array}\right.$$

Zweiter Abschnitt.

Von den combinatorischen Operationen, insofern sie auf mehrere Elementenreihen Bezug haben.

§. 33.

Vom Variiren im Allgemeinen.

Es sind mehrere verschiedene Elementenreihen gegeben, man soll aus den Elementen aller dieser Reihen Zusammenstellungen bilden. Daß hier mehrere, theils zu sehr verwickelten Operationen Veranlassung gebende Annahmen gemacht werden können, erhellet auf den ersten Anblick; man hat sich jedoch bis jetzt nur mit der einfachen Voraussetzung begnügt, nach welcher zur Erzeugung einer Form jede Reihe eins ihrer Elemente hergiebt, eine Annahme, welche zu Resultaten führt, ohne die die Analysis wohl nie zu dem Grade der Vollkommenheit gelangt wäre, in welchem sie sich gegenwärtig befindet.

Die Elemente der ersten Reihe mögen durch $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots \overset{r}{a} \ldots$, die der zweiten durch $\overset{1}{b}, \overset{2}{b}, \overset{3}{b} \ldots \overset{r}{b} \ldots$, allgemein, die der nten Reihe durch $\overset{1}{n}, \overset{2}{n}, \overset{3}{n} \ldots \overset{r}{n} \ldots$ bezeichnet werden, so, daß also der Stoff zur Bildung der Variationsformen folgendes Schema hat:

$$\begin{array}{l} \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a} \ldots \overset{r}{a} \ldots \\ \overset{1}{b}, \overset{2}{b}, \overset{3}{b} \ldots \overset{r}{b} \ldots \\ \vdots \\ \overset{1}{n}, \overset{2}{n}, \overset{3}{n} \ldots \overset{r}{n} \ldots \end{array}$$

Nach der ersten Recursionsformel gehen die Formen in lexicographischer Ordnung hervor, während diese alle die Formen in eine Gruppe zusammenstellt, welche gleiche End-Elemente haben

§. 36.

Die Indices der Elemente erscheinen bei den Variationsformen in allen Combinationen, welche sich aus ihnen bilden lassen, und jede dieser Combinationsformen in allen ihren Versetzungen.

Das independente Verfahren bei der Ableitung der Variationsformen hat Aehnlichkeit mit dem bei Erzeugung der Combinationsformen mit Wiederholungen. Die niedrigste Form bildete sich eben so, auch die successiv höheren, so lange man die letzte Stelle erhöhete. Sobald man aber einer andern Stelle ein höheres Element ertheilte, füllte man alle folgenden Stellen mit dem ersten Elemente aus, während man sie bei den Combinationsformen mit eben dem Elemente besetzte, womit man erhöhete. Erst nachdem diese folgenden, mit ersten Elementen besetzten Stellen wieder hinlänglich erhöhet waren, gelangte man zu einer Form, die, als Combinationsform, die nächsthöhere gewesen wäre. Wäre man z. B. bei Ableitung von $\overset{3}{V}$ [1..4] auf die Form 144 gekommen, so ist die nächsthöhere Variationsform: 211, die nächsthöhere Combinationsform aber: 222. Zu dieser Form, 222, kam man aber beim Variiren auch, nachdem man die Form 211 successiv in 212, 213, 214, 221 erhöhet hatte. Die höchste Variationsform wird immer aus lauter höchsten Elementen bestehen, so wie die höchste Combinationsform, welche sich aus der Reihe seiner Anzeiger bilden läßt.

Unter den Variationsformen, sobald man sich der Bezeichnung bedient, daß nur die den Elementen aller Reihen gemeinschaftlichen Anzeiger in die Complexionen eintreten, befinden sich also alle Combinationsformen, die sich aus diesen Anzeigern ableiten lassen, d. h. alle aus denselben gebildeten Formen, welche dem Inhalte nach von einander verschieden sind. Die übrigen Variationsformen können also nur in der Folge von diesen abweichen. Betrachtet man nun irgend eine Variationsform, zu deren Bildung also jede der gegebenen Elementenreihen ein Element von einer gewissen

Höhe beigetragen hat, so ist klar, daß jede dieser Reihen jedes der sich in der Form befindenden Elemente zur Bildung der Formen hergeben kann, d. h. daß es außer jener Form noch mehrere andere gebe, worin dieselben Indices sind, so, daß nach und nach jeder Index jede Stelle einnimmt, oder daß jede Folge derselben zum Vorschein kommt.

Die allen Elementenreihen gemeinschaftlichen Indices erscheinen also bei den Variationsformen in allen Combinationen, und jede dieser Formen in allen ihren Permutationen.

Man kann also, um einen Inbegriff von Variationsformen zu erzeugen, zuerst alle Combinationsformen aus den Anzeigern bilden, und jede derselben permutiren.

Z. B.

$\overset{3}{V}[1..3] =$	111,	112,	113,	122,	123,	133,	222,	223,	233,	333
		121,	131,	212,	132,	313,		232,	323	
		211,	311,	221,	213,	331,		322,	332	
					231,					
					312,					
					321,					

$\overset{4}{V}[1..3] =$	1111,	1112,	1113,	1122,	1123,	1133,	1222,	1223
		1121,	1131,	1212,	1132,	1313,	2122,	1232
		1211,	1311,	1221,	1213,	1331,	2212,	1322
		2111,	3111,	2112,	1231,	3113,	2221,	2123
				2121,	1312,	3131,		2132
				2211,	1321,	3311,		2213
					2113,			2231
					2131,			2312
					2311,			2321
					3112,			3122
					3121,			3212
					3211,			3221

1233,	1333,	2222,	2223,	2233,	2333,	3333
1323,	3133,		2232,	2323,	3233,	
1332,	3313,		2322,	2332,	3323,	
2133,	3331,		3222,	3223,	3332,	
2313,				3232,		
2331,				3322,		
3123,						
3132,						
3213,						
3231,						
3312,						
3321,						

Sollten die Reihen der Elemente, aus denen sich Variationsformen bilden sollen, alle identisch seyn, so bedeuten die Anzeiger von gleichem Range in den Complexionen auch immer dasselbe Element, und alle die Formen also, welche nur in der Folge der Anzeiger von einander abweichen, ganz dieselben Formen.

Man hat also alsdann nur nöthig, alle Combinationsformen aus den Anzeigern zu bilden, und jede derselben mit der Zahl als Factor zu versehen, welche anzeigt, wie oft sich jene Elemente versetzen lassen. Wenn jede Combinationsform von $\overset{k}{C}[1..n]$ so oft genommen werden soll, als sich ihre Elemente versetzen lassen, so soll dies im Folgenden durch das Zeichen ${}_p\overset{k}{C}[1..n]$ angedeutet werden.

Sind also alle k Elementenreihen, woraus sich $\overset{k}{V}[1..n]$ bilden soll, identisch, so ist:

$$\overset{k}{V}[1..n] = {}_p\overset{k}{C}[1..n]$$

und die Recursionsformel:

$$\overset{k}{V}[1..n] = \overset{k-1}{V}[1..n].1 + \overset{k-1}{V}[1..n].2 \ldots + \overset{k-1}{V}[1..n].r \ldots + \overset{k-1}{V}[1..n]n$$

verwandelt sich in:

$$
{}_p\overset{k}{C'}[1..n] = {}_p\overset{k-1}{C'}[1..n].1 + {}_p\overset{k-1}{C'}[1..n].2 \ldots + {}_p\overset{k-1}{C'}[1..n].r \ldots + {}_p\overset{k-1}{C'}[1..n].n
$$

so wie:

$$
\overset{k}{V}[1..n] = 1.\overset{k-1}{V}[1..n] + 2.\overset{k-1}{V}[1..n] \ldots + r.\overset{k-1}{V}[1..n] \ldots + n.\overset{k-1}{V}[1..n]
$$

in:

$$
{}_p\overset{k}{C'}[1..n] = 1.{}_p\overset{k-1}{C}[1..n] + 2.{}_p\overset{k-1}{C}[1..n] \ldots + r.{}_p\overset{k-1}{C}[1..n] \ldots + n\,{}_p\overset{k-1}{C}[1..n]
$$

Z. B.

$$
{}_p\overset{3}{C'}[1..3] = {}_p\overset{2}{C}[1..3].1 + {}_p\overset{2}{C}[1..3].2 + {}_p\overset{2}{C}[1..3].3.
$$

$$
= \begin{cases} {}_p\overset{2}{C}[1..3].1 = 11.1,\ 2.(12.1),\ 2.(13.1),\ 22.1,\ 2\,(23.1),\ 33.1 \\ {}_p\overset{2}{C}[1..3].2 = 11.2,\ 2.(12.2),\ 2.(13.2),\ 22.2,\ 2.(23.2),\ 33.2 \\ {}_p\overset{2}{C}[1..3].3 = 11.3,\ 2.(12.3),\ 2.(13.3),\ 22.3,\ 2.(23.3),\ 33.3 \end{cases}
$$

B. Von der Bildung der Variationsformen aus unvollständigen Reihen.

§. 37.

Independentes Verfahren.

Bis jetzt haben wir uns nur mit dem speciellen Falle beschäftigt, daß die Reihen, aus welchen sich die Variationsformen bilden, vollständig alle Elemente enthalten. Macht man nun aber die Voraussetzung, daß in den einzelnen Reihen Elemente fehlen, so werden die oben abgeleiteten Regeln einige Veränderungen erleiden müssen, obgleich das Wesentlichste derselben unverändert bleiben muß.

Die niedrigste Form muß immer die seyn, wozu jede Reihe ihr niedrigstes Element hergegeben hat, gleichviel, was es für einen Rang hat. Sind z. B. die Reihen:

$$\begin{array}{llll} \overset{1}{a}, & \overset{2}{a}, & \overset{3}{a}, & \\ & \overset{2}{b}, & \overset{3}{b}, & \overset{4}{b} \\ \overset{1}{c}, & & \overset{3}{c}, & \\ \overset{1}{d}, & \overset{2}{d}, & & \overset{4}{d} \end{array}$$

gegeben, so ist die niedrigste Variationsform aus denselben $\overset{1}{a}, \overset{2}{b}, \overset{1}{c}, \overset{1}{d}$ oder 1211, denn jede Reihe bot ihr niedrigstes Element zu ihrer Erzeugung dar. Die Erhöhbarkeit einer Stelle erkennt man daran, daß die Reihe, aus welcher sie Elemente annimmt, noch ein höheres Element enthält, als das, welches in ihr stehet. Sucht man die spätest erhöhbare Stelle auf, setzt in sie ein so wenig als möglich höheres Element, und füllt alle folgenden Stellen so niedrig als möglich aus, welches dadurch geschehen muß, daß ihre Reihen ihre niedrigsten Elemente dazu hergeben, so wird man die nächsthöhere Form abgeleitet haben. Ist z. B. aus obigen Reihen die Form 1214 gebildet, so ist die dritte Stelle die späteste, welche einer Erhöhung fähig ist; setzt man das Element hinein, welches, aus ihrer Reihe genommen, das nächsthöhere ist, und giebt der letzten Stelle ein so niedriges Element als möglich, so hat man die nächsthöhere Form 1231. Der Gang des Verfahrens ist also im Allgemeinen derselbe, er wird jedoch nicht so regelmäßig seyn, indem man immer die Individualität des Gegenstandes im Auge haben muß.

Z. B. die Variationsformen, welche sich aus obigen Reihen erzeugen lassen, sind folgende:

1211, 1212, 1214, 1231
1232, 1234, 1311, 1312
1314, 1331, 1332, 1334
1411, 1412, 1414, 1431
1432, 1434, 2211, 2212
2214, 2231, 2232, 2234
2311, 2312, 2314, 2331
2332, 2334, 2411, 2412

2414, 2431, 2432, 2434
3211, 3212, 3214, 3231
3232, 3234, 3311, 3312
3314, 3331, 3332, 3334
3411, 3412, 3414, 3431
3432, 3434.

sind ferner die Reihen:

$\overset{1}{a},\ \overset{2}{a},\ \overset{3}{a},\ \overset{4}{a}$

$\overset{2}{b},\ \overset{4}{b}$

$\overset{1}{c},\ \overset{2}{c},\ \overset{3}{c}$

$\overset{1}{d},\ \overset{2}{d},\ \overset{4}{d}$

geben, so sind die Variationsformen folgende:

1211, 1212, 1214, 1221
1222, 1224, 1231, 1232
1234, 1411, 1412, 1414
1421, 1422, 1424, 1431
1432, 1434, 2211, 2212
2214, 2221, 2222, 2224
2231, 2232, 2234, 2411
2412, 2414, 2421, 2422
2424, 2431, 2432, 2434
3211, 3212, 3214, 3221
3222, 3224, 3231, 3232
3234, 3411, 3412, 3414
3421, 3422, 3424, 3431
3432, 3434, 4211, 4212
4214, 4221, 4222, 4224
4231, 4232, 4234, 4411
4412, 4414, 4421, 4422
4424, 4431, 4432, 4434.

§. 38.

Recurrirendes Verfahren.

Auch die recurrirende Regel findet hier mit den gehörigen Beschränkungen ihre Anwendung. Hat man aus gewissen Reihen alle Variationsformen erzeugt, und kömmt eine andere hinzu, so wird man jeder schon gebildeten Form aus den frühern Reihen successiv jedes Element der neuhinzugekommenen nachsetzen, damit Variationsformen hervorgehen, welche aus allen vorhandenen Reihen gebildet werden können.

Hat man z. B. aus den Reihen:

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{a},\ \overset{3}{a}$$

$$\overset{2}{b},\ \overset{3}{b}$$

$$\overset{1}{c},\ \overset{3}{c}$$

den vollständigen Inbegriff aller Variationsformen erzeugt,

121, 123, 131, 133
221, 223, 231, 233
321, 323, 331, 333

und kommt eine neue Reihe $\overset{2}{d}, \overset{3}{d}$ hinzu, so wird man den vorstehenden Formen beide Elemente nachsetzen, um die Formen zu erhalten, welche sich aus jenen 4 Reihen bilden lassen.

121.2, 123.2, 131.2, 133.2
221.2, 223.2, 231.2, 233.2
321.2, 323.2, 331.2, 333.2.

121.3, 123.3, 131.3, 133.3
221.3, 223.3, 231.3, 233.3
321.3, 323.3, 331.3, 333.3.

Der Satz aber, daß die Anzeiger bei den Variationsformen in allen Combinationen erscheinen, wovon jede der Formen permutirt ist, findet hier nicht statt. Es können so wenig alle Combinationsformen hervorgehen, die sich aus dem allen Reihen

gemeinschaftlichen Inder bilden lassen, noch können die Formen, welche dem Inhalte nach von einander verschieden sind, in allen Versetzungen erscheinen, denn nicht jede Reihe bietet jedes Element zur Bildung der Formen dar.

II. Vom Variiren zu bestimmten Summen.

§. 39.

Vom Variiren zu bestimmten Summen im Allgemeinen.

Auch unter den Variationsformen zu einer gewissen Klasse, oder aus einer gegebenen Menge von Elementenreihen gebildet, wird man solche wahrnehmen, welche, wenn man die Indices der in ihnen enthaltenen Elemente zusammenzählt, dieselbe Summe darbieten. Die Regeln, nach welchen man diese Formen unabhängig von den übrigen Complexionen darstellen kann, soll der Gegenstand dieses Kapitels seyn. Auch hier wird man, der Vollständigkeit und Allgemeinheit der Betrachtungen wegen, Elemente mit zur Betrachtung ziehen müssen, deren Rangzahlen o oder negativ sind.

Die niedrigste Variationsform ist nun bekanntlich die, in welcher alle Stellen mit niedrigsten Elementen besetzt, die höchste diejenige, in der alle Stellen mit höchsten Elementen angefüllt sind, die erste wird von allen die niedrigste, die letzte die höchste Summe darbieten. Ist nun also die gefoderte Summe niedriger als das niedrigste Element so oft genommen, als es die Klasse anzeigt, oder höher, als das höchste Element eben so vielmal genommen, so ist die Foderung ungereimt. Ist daher m an sich eine positive Zahl, so sind die Ausdrücke ${}^{kq-m}\overset{k}{V}[q..r]$ und ${}^{kr+m}\overset{k}{V}[q..r]$ Unmögliches fodernd.

A. Von der Bildung einzelner Klassen zu vorgeschriebenen Summen.

§. 40.

Independentes Verfahren.

Die niedrigste Form, oder die, in welcher alle Stellen von der ersten bis zur höchsten so niedrig als möglich besetzt sind, bildet sich natürlich dadurch, daß man alle Stellen außer der letzten mit ersten Elementen anfüllt, und erst dieser das Element ertheilt, welches die Summe ergänzt. Gehen die Elemente in unbestimmte Weite fort, so reicht diese Regel hin; brechen sie aber bei einer gewissen Höhe ab, so kann es der Fall seyn, daß ein so hohes Element nicht vorhanden ist, um die gefoderte Summe damit zu ergänzen. In diesem Falle wird man der letzten Stelle das höchste Element ertheilen, welches ihre Reihe darbietet, und der nächstniedrigeren Stelle darauf das Ergänzungs-Element geben; fehlt auch dazu noch ein hinlänglich hohes Element, so wird man auch in diese Stelle das höchste setzen, welches ihre Reihe hergeben kann, um darauf der nächstniedrigeren Stelle das Ergänzungs-Element zu geben u. s. w.

Hat man, um aus einer Form die nächsthöhere abzuleiten, die höchste Stelle, welche eine Erhöhung vertrug, erhöhet, so muß die Summe der übrigen Elemente kleiner werden, wenn die gefoderte Summe dieselbe bleiben soll. Diese Erniedrigung können aber die vorhergehenden Stellen nicht erleiden, wenn man die zu erhöhende Form nicht erniedrigen will. Soll also eine Stelle erhöhbar seyn, so muß man nach der Erhöhung die folgenden Stellen so ausfüllen können, daß die Summe wieder hervorgehet, und da dieses Ausfüllen nach den Regeln des Variirens mit niedrigsten Elementen geschehen kann, so muß nach der Erhöhung wenigstens noch so viel an der gefoderten Summe fehlen, als die Summe so vieler niedrigsten Elemente beträgt, wie noch nachfolgende Stellen vorhanden sind.

Sind also hinter einer Stelle alle folgenden mit niedrigsten Elementen besetzt, so kann jene Stelle nicht mehr erhöhbar seyn. Um also die nachfolgenden Stellen so niedrig als möglich auszufüllen, besetze man sie mit niedrigsten Elementen, und ertheile der letzten das Element, welches die gefoderte Summe wieder ergänzt. Gehen

nun die Elemente in unbestimmte Weite fort, so reicht diese Regel hin; brechen sie aber bei einer gewissen Höhe ab, so kann es seyn, daß ein so hohes Element, als zu jener Ergänzung nöthig ist, nicht vorhanden ist, in welchem Falle man eben so, wie bei Erzeugung der niedrigsten Form verfahren wird. (§. 4.)

Hat man nun bei der Erhöhung irgend einer Stelle die nachfolgenden mit niedrigsten Elementen, die letzte aber mit dem höheren Ergänzungs-Elemente besetzt, so wird darauf die vorletzte Stelle wieder erhöhbar werden, und das successive Erhöhen derselben geschiehet dadurch, daß man ihr jedesmal eine Einheit zulegt, während man die letzte um eins vermindert, welches so lange fortdauern wird, bis die letzte Stelle ein niedrigstes Element besitzt.

Z. B.

$^{6}\overset{5}{V}[1..]$ = 114, 123, 132, 141
213, 222, 231, 312
321, 411.

$^{2}\overset{3}{V}[-3..]$ = -3-37, -3-26, -3-15, -304
-313, -322, -331, -340
-35-1, -36-2, -37-3, -2-36
-2-25, -2-14, -203, -212
-221, -230, -24-1, -25-2
-26-3, -1-35, -1-24, -1-13
-102, -111, -120, -13-1
-14-2, -15-3, 0-34, 0-23
0-12, 001, 010, 02-1
03-2, 04-3, 1-33, 1-22
1-11, 100, 11-1, 12-2
13-3, 2-32, 2-21, 2-10
20-1, 21-2, 22-3, 3-31
3-20, 3-1-1, 30-2, 31-3
4-30, 4-2-1, 4-1-2, 40-3
5-3-1, 5-2-2, 5-1-3, 6-3-2
6-2-3, 7-3-3.

${}^{5}\overset{2}{V}[0..]$ = 09, 18, 27, 36
45, 54, 63, 72
81, 90.

${}^{0}\overset{4}{V}[-2..]$ = -2-2-26, -2-2-15, -2-204, -2-213
-22-2-2, -2-231, -2-240, -2-25-1
-2-26-2, -2-1-25, -2-1-14, -2-103
-2-112, -2-121, -2-130, -2-14-1
-2-15-2, -20-24, -20-13, -2002
-2011, -2020, -203-1, -204-2
-21-23, -21-12, -2101, -2110
-212-1, -213-2, -22-22, -22-11 u. s. w.

${}^{4}\overset{3}{V}[0..3]$ = 013, 022, 031, 103
112, 121, 130, 202
211, 220, 301, 310.

${}^{7}\overset{4}{V}[1..2]$ = 1222, 2122, 2212, 2221.

${}^{7}\overset{4}{V}[1..]$ = 1114, 1123, 1132, 1141
1213, 1222, 1231, 1312
1321, 1411, 2113, 2122
2131, 2212, 2221, 2311
3112, 3121, 3211, 4111.

Da die Indices der Elemente bei den Variationsformen in allen Combinationen erscheinen, von denen jede Form permutirt ist, und da alle Permutationsformen dieselbe Summe geben, so müssen bei den Variationsformen zu bestimmten Summen die Inhaltsverschiedenen Formen in allen ihren Versetzungen erscheinen. Um daher alle Variationsformen aus gewissen Reihen zu bilden, welche einer vorgeschriebenen Summe angehören, braucht man nur alle Combinationsformen zu derselben Summe aus dem jenen Reihen gemeinschaftlichen Index zu erzeugen, und jede derselben zu permutiren. Z. B.

$${}^{5}\overset{3}{V}[1..] =$$

113,	122
131,	212
311,	221

$${}^{2}\overset{4}{V}[-1..] =$$

-1-1-15,	-1-104,	-1-113,	-1-122,	-1003
-1-15-1,	-1-140,	-1-131,	-12-12,	-1030
15 1 1,	-10-14,	-11-13,	-122-1,	-1300
5-1-1-1,	-104-1,	-113-1,	2-1-12,	0-103
	-14-10,	-13-11,	2-12-1,	0-130
	-140-1,	-131-1,	22-1-1,	00-13
	0-1-14,	1-1-13,		003-1
	0-14-1,	1-13-1,		03-10
	04-1-1,	13-1-1,		030-1
	4-1-10,	3-1-11,		3-100
	4-10-1,	3-11-1,		30-10
	40-1-1,	31-1-1,		300-1

-1012,	-1111,	0002,	0011
-1021,		0020,	0101
-1102,		0200,	0110
-1120,		2000,	1001
-1201,			1010
-1210,			1100
0-112			
0-121			
01-12			
012-1			
02-11			
021-1			
1-102			
1-120			
10-12			
102-1			
12-10			
120-1			
2-101			
2-110			
20-11			
201-1			
21-10			
210-1			

§. 41.

Recurrirendes Verfahren.

Gehen die Elemente in unbestimmte Weite fort, so bestand die niedrigste Form aus lauter niedrigsten Elementen, außer in der letzten Stelle, wo sie das Ergänzungs-Element besaß. Sondert man also das erste Element davon ab, so muß die niedrigste Form der nächstniedrigeren Klasse entstehen, welche einer Summe angehört, die um so viel geringer, als die gefoderte Summe ist, als der Index des niedrigsten Elements Einheiten in sich faßt, denn in ihr sind alle Stellen von der ersten an bis zur höchsten so niedrig als möglich besetzt. Man erhöhete nun die folgenden Stellen nach der anfänglichen so lange, bis sie keiner Erhöhung mehr fähig waren, d. h. bis jene durch Absonderung des ersten Elements entstandene niedrigste Form bis zur höchsten erhöhet war. Die niedrigste Ordnung bestand also aus dem Inbegriffe aller Variationsformen der nächstniedrigeren Klasse, zu einer Summe, welche der anfänglich gefoderten weniger so viel Einheiten, als das niedrigste Element in sich begreift, gleich war, denen das niedrigste Element wieder vorgesetzt war. Ist also die gefoderte Summe $= n$, die Klasse $= k$, und die Elemente $= p$, $(p+1)$, ... so ist die niedrigste Ordnung $= {}^{n-p}_{p}\overset{k-1}{V} p.\therefore]$. Ganz auf dieselbe Art bilden sich alle folgenden Klassen. Die niedrigste Form der rten Klasse nach der anfänglichen hat in der ersten Stelle das Element $p+r$, in den folgenden das niedrigste Element, p, und nur in der letzten das Ergänzungs-Element. Sondert man also das Element der ersten Stelle ab, so bleibt eine Form des $k-1$ten Grades übrig, welche, aus den anfänglich gegebenen Elementen gebildet, der Summe $n(p+r)$ angehört, und zwar die niedrigste, welche sich bilden läßt, denn alle Stellen von der ersten bis zur höchsten sind so niedrig als möglich besetzt. Man erhöhete darauf alle folgenden Stellen nach und nach, bis sie so hoch als möglich besetzt waren, d. h. um die rte Ordnung nach der anfänglichen zu bilden, leitete man den Inbegriff aller Variationsformen zur Klasse $k-1$ und Summe $n-(p+r$ aus den anfänglich gegebenen Elementen ab, und setzte ihnen $p+r$ vor, so, daß die rte Ordnung nach der anfänglichen $= {}^{n-(p+r)}_{p+r.}\overset{k-1}{V}[p..]$. Die höchste Ordnung wird nur aus einer Form bestehen,

welche in allen nachfolgenden Stellen niedrigste Elemente, in der ersten aber das ergänzende Element besitzt; ist also die Klasse k, so begreift sie (k-1) mal das niedrigste Element, die Summe aller dieser nachfolgenden Stellen ist also $= (k-1)p$. und der Rang des höchsten Elements in der Form ist $= n-(k-1)p$, welcher also auch die höchste Ordnung ist. Man hat also folgende Recursionsformel:

$$ {}^{n}\overset{k}{V}[p..] = {}^{n-p}_{p}\overset{k-1}{V}[p..] + {}^{n-(p+1)}_{p+1}\overset{k-1}{V}[p..] \ldots + {}^{n-(p+r)}_{p+r}\overset{k-1}{V}[p..] \ldots + {}^{(k-1)p}_{n-(k-1)p}\overset{k-1}{V}[p..] $$

Für $p=1$ ist also:

$$ {}^{n}\overset{k}{V}[1..] = {}^{n-1}_{1}\overset{k-1}{V}[1..] + {}^{n-2}_{2}\overset{k-1}{V}[1..] \ldots + {}^{n-r}_{r}\overset{k-1}{V}[1..] \ldots + {}^{k-1}_{n-(k-1)}\overset{k-1}{V}[1..] $$

Danach bildet sich z. B.

$$ {}^{5}\overset{3}{V}[1..] = {}^{4}_{1}\overset{2}{V}[1..] + {}^{3}_{2}\overset{2}{V}[1..] + {}^{2}_{3}\overset{2}{V}[1..] $$

$$ = \left\{ \begin{array}{l} {}^{4}_{1}\overset{2}{V}[1..] = 1.13,\ 1.22,\ 1.31 \\ + {}^{3}_{2}\overset{2}{V}[1..] = 2.12,\ 2.21 \\ + {}^{2}_{3}\overset{2}{V}[1..] = 3.11 \end{array} \right. $$

$$ {}^{-1}\overset{3}{V}[-2..] = {}^{1}_{-2}\overset{2}{V}[-2..] + {}^{0}_{-1}\overset{2}{V}[-2..] + {}^{-1}_{0}\overset{2}{V}[-2..] + {}^{-2}_{1}\overset{2}{V}[-2..] + {}^{-3}_{2}\overset{2}{V}[-2..] + {}^{-4}_{3}\overset{2}{V}[-2..] $$

$$ = \left\{ \begin{array}{l} {}^{1}_{-2}\overset{2}{V}[-2..] = -2.-23,\ -2.-12,\ -2.01,\ -2.10,\ -2.2-1,\ -2.3-2 \\ + {}^{0}_{-1}\overset{2}{V}[-2..] = -1.-22,\ -1.-11,\ -1.00,\ -1.1-1,\ -1.2-2 \\ + {}^{-1}_{0}\overset{2}{V}[-2..] = 0.-21,\ 0.-10,\ 0.0-1,\ 0.1-2 \\ + {}^{-2}_{1}\overset{2}{V}[-2..] = 1.-20,\ 1.-1-1,\ 1.0-2 \\ + {}^{-3}_{2}\overset{2}{V}[-2..] = 2.-2-1,\ 2.-1-2 \\ + {}^{-4}_{3}\overset{2}{V}[-2..] = 3.-2-2 \end{array} \right. $$

Durch dieselben Schlüsse, wie bei §. 35, kann man obige Recursionsformel in

$${}^{n}\overset{k}{V}[p..] = {}^{n-p}\overset{k-1}{V}[p..]p + {}^{n-(p+1)}\overset{k-1}{V}[p..](p+1)\ldots$$

$$+ {}^{n-(p+h)}\overset{k-1}{V}[p..](p+h)\ldots {}^{(k-1)p}\overset{k-1}{V}[p..](n-(k-1)p)$$

verwandeln.

Für $p = 1$ ist sie:

$${}^{n}\overset{k}{V}[1..] = {}^{n-1}\overset{k-1}{V}[1..]1 + {}^{n-2}\overset{k-1}{V}[1..].2\ldots + {}^{n-h}\overset{k-1}{V}[1..].h\ldots$$

$$+ {}^{k-1}\overset{k-1}{V}[1..](n-(k-1))$$

Z. B.

$${}^{7}\overset{4}{V}[1..] = {}^{6}\overset{3}{V}[1..].1 + {}^{5}\overset{3}{V}[1..].2 + {}^{4}\overset{3}{V}[1..].3 + {}^{3}\overset{3}{V}[1..].4$$

$$= {}^{6}\overset{3}{V}[1..].1 = $$ 114.1, 123.1, 132.1, 141.1
213.1, 222.1, 231.1, 312.1
321.1, 411.1

$$+ {}^{5}\overset{3}{V}[1..].2 = $$ 113.2, 122.2, 131.2, 212.2
221.2, 311.2

$$+ {}^{4}\overset{3}{V}[1..].3 = $$ 112.3, 121.3, 211.3

$$+ {}^{3}\overset{3}{V}[1..].4 = $$ 111.4

ferner:

$${}^{4}\overset{3}{V}[0..] = {}^{4}\overset{2}{V}[0..].0 + {}^{3}\overset{2}{V}[0..].1 + {}^{2}\overset{2}{V}[0..].2 + {}^{1}\overset{2}{V}[0..].3 + {}^{0}\overset{2}{V}[0..].4$$

$$= {}^{4}\overset{2}{V}[0..].0 = $$ 04 0, 13.0, 22.0, 31.0, 40.0

$$+ {}^{3}\overset{2}{V}[0..].1 = $$ 03.1, 12.1, 21.1, 30.1

$$+ {}^{2}\overset{2}{V}[o..].2 = 02.2,\ 11.2,\ 20.2$$

$$+ {}^{1}\overset{2}{V}[o..].3 = 01.3,\ 10.3$$

$$+ {}^{0}\overset{2}{V}[o..].4 = 00.4$$

Sind die Elementenreihen alle identisch, so verwandeln sich allgemein die Recursionsformeln in:

$$ {}^{n}_{p}\overset{k}{C}[p..] = {}^{n-p}_{p.p}\overset{k-1}{C}[p..] + {}^{n-(p+1)}_{p+1\,p}\overset{k-1}{C}[p..]\ldots + {}^{n-(p+r)}_{p+r.p}\overset{k-1}{C}[p..]\ldots$$

$$+ {}^{(k-1)p.}_{n-(k-1)p\,p}\overset{k-1}{C}[p..]$$

oder: für $p = 1$:

$$ {}^{n}_{p}\overset{k}{C}[1..] = {}^{n-1}_{1\,p}\overset{k-1}{C}[1..] + {}^{n-2}_{2.p}\overset{k-1}{C}[1..]\ldots + {}^{n-h}_{h\,p}\overset{k-1}{C}[1..]\ldots$$

$$+ {}^{k-1}_{n-(k-1)p}\overset{k-1}{C}[1..].$$

$$ {}^{n}_{p}\overset{k}{C}p..] = {}^{n-p}_{p}\overset{k-1}{C}[p..].p + {}^{n-(p+1)}_{p}\overset{k-1}{C}[p..](p+1)\ldots$$

$$+ {}^{n-(p+r)}_{p}\overset{k-1}{C}[p..](p+r]\ldots + {}^{(k-1)p}_{p}\overset{k-1}{C}[p..](n-(k-1)p)$$

für $p = 1$ ist:

$$ {}^{n}_{p}\overset{k}{C}[1..] = {}^{n-1}_{p}\overset{k-1}{C}[1..].1 + {}^{n-2}_{p}\overset{k-1}{C}[1..].2\ldots + {}^{n-r}_{p}\overset{k-1}{C}[1..].r\ldots$$

$$+ {}^{k-1}_{p}\overset{k-1}{C}[1..](n-(k-1))$$

Was die independente Erzeugung der einzelnen Ordnungen anbetrifft, so ist dieses aus der Ableitung der Recursionsformel schon klar.

B. Von der Bildung aller Klassen, welche bei vorgeschriebener Summe möglich sind.

§. 42.

Von der Operation im Allgemeinen.

Ist die Summe und das niedrigste Element, worauf die übrigen bis zu jeder beliebigen Höhe folgen mögen, gegeben, so ist die Klasse oft nicht mehr willkührlich, die möglichen Klassen-Exponenten werden in gewissen Fällen nicht unbegränzt seyn, während sie in andern Fällen jede beliebige positive Zahl seyn können.

Fangen die Elemente der Reihen mit negativen Anzeigern oder mit 0 an, und wird eine positive Summe gefodert, so kann man so viele Stellen als man will, mit dem niedrigsten Elemente besetzen, man wird immer, da jedes positive Element zu Gebote steht, in die nächstfolgende Stelle das Element setzen können, welches, die Summe der früher gesetzten Elemente aufhebend, die gefoderte Summe hervorbringt. Da nun ferner unter den Elementen jedes positive anzutreffen ist, so muß auch eins dabei seyn, welches mit der gefoderten positiven Summe übereinkommt, und welches, für sich gesetzt, die niedrigste Klasse darstellt. Fangen also die Anzeiger der Elemente bei einer negativen Zahl oder 0 an, und ist die gefoderte Summe positiv, so ist jede Klasse möglich.

Ist die gefoderte Summe negativ, und reichen die negativen Elemente so weit hinab, wie die Summe, so ist dadurch die erste Klasse möglich. Man kann aber auch mit diesem niedrigsten Elemente so viele Stellen besetzen, als man will, und wird immer in die folgende ein so hohes positives Element setzen können, daß die Summe der gesetzten negativen Elemente dadurch so weit aufgehoben wird, daß die gefoderte Summe übrig bleibt. Also auch in diesem Falle ist jede Klasse denkbar.

Ganz anders ist es, wenn die Elemente, aus welchen man Variationsformen zu einer positiven Summe bilden soll, mit 1 anfangen, und in ununterbrochener Reihe fortgehen. Die erste Klasse ist immer möglich, denn es giebt ein Element, welches mit der Summe übereinkommt. Besetzt man aber auch alle Stellen so niedrig

als möglich, so wird man doch, ohne die vorgeschriebene Summe zu überschreiten, nicht mehr als so viel Stellen besetzen können, wie die gefoderte Summe anzeigt. Soll man also aus den Elementen 1, 2... Variationsformen zur Summe n bilden, so sind nur die n ersten Klassen möglich. Um der Foderung ein Genüge zu leisten, kann man also jede Klasse für sich erzeugen, und der Inbegriff aller dieser Formen, welche in arithmographischer Ordnung hervorgehen, wird das Verlangte darstellen.

Wir wollen uns zur Bezeichnung aller Formen, welche sich aus den Elementen 1, 2... zur Summe n bilden lassen, des Zeichens ${}^{n}V[1..]$ bedienen.

So ist also z. B.

$$
{}^{6}V[1..] = {}^{6}\overset{1}{V}[1..] = 6
$$

$$
= \left\{
\begin{array}{lll}
+ {}^{6}\overset{2}{V}[1..] & = & 15,\ 24,\ 33,\ 42,\ 51 \\
+ {}^{6}\overset{3}{V}[1..] & = & 114,\ 123,\ 132,\ 141 \\
 & & 213,\ 222,\ 231,\ 312 \\
 & & 321,\ 411 \\
+ {}^{6}\overset{4}{V}[1..] & = & 1113,\ 1122,\ 1131,\ 1212 \\
 & & 1221,\ 1311,\ 2112,\ 2121 \\
 & & 2211,\ 3111 \\
+ {}^{6}\overset{5}{V}[1..] & = & 11112,\ 11121,\ 11211,\ 12111,\ 21111 \\
+ {}^{6}\overset{6}{V}[1..] & = & 111111
\end{array}
\right.
$$

Sollen jedoch die Formen in lexicographischer Ordnung hervorgehen, so ist ein ursprüngliches Verfahren nöthig.

§. 43.

Independentes Verfahren.

Die niedrigste Form, oder die, in welcher alle Stellen von der ersten an, so niedrig als möglich besetzt sind, ist offenbar die, welche lauter erste Elemente enthält, oder die, welche die höchste Klasse darstellt.

Um eine Form zu erhöhen, wird man die letzte Stelle nie zur Erhöhung ziehen können, weil dadurch die vorgeschriebene Summe vergrößert werden würde, wenn man nicht frühere Stellen erniedrigen wollte, welches aber die Form nicht erhöhen, sondern sie erniedrigen hieße. Es müssen nach einer zu erhöhenden Stelle noch Elemente nachfolgen, welche niedriger besetzt werden müssen, falls jene ein höheres Element bekommt. Da nun aber unter den abzuleitenden Formen die aller Klassen von der ersten bis zur nten, wenn n die gefoderte Summe ist, vorkommen, so folgt, daß man auf die Menge der nach der erhöheten wieder auszufüllenden Stellen durchaus nicht zu sehen habe, sondern nur, daß man folgende Stellen so niedrig als möglich besetzt. Dieses wird aber immer geschehen, wenn man so viele Stellen mit ersten Elementen ausfüllt, als noch Einheiten an der gefoderten Summe fehlen. Wie viel Stellen man also auf solche Weise besetzt, hängt von der Individualität der zu erhöhenden Form ab, man wird oft nur eine, oft sogar gar keine nachfolgende Stelle besetzen müssen, welches geschiehet, wenn durch die Erhöhung selbst schon die gefoderte Summe dargestellt wird. Da nun die mindeste Erhöhung einer Stelle um eine Einheit geschiehet, zu welcher Erhöhung die nachfolgenden Stellen den Stoff hergeben müssen, so folgt, daß jede Stelle, hinter welcher noch ein Element, welches es auch sey, nachfolgt, oder, daß jederzeit die vorletzte Stelle erhöhbar ist. Die Regel lautet also folgendermaaßen: man erhöhe die vorletzte Stelle um eine Einheit, und stelle ihr so viel erste Elemente nach, bis die gefoderte Summe ergänzt ist; besitzt die letzte Stelle das erste Element, so wird man gar keine Stelle nach der erhöheten besetzen dürfen. Die höchste Form darf kein vorhergehendes Element mehr enthalten, in ihr muß also nur eine Stelle besetzt seyn.

Z. B.

$^6V[1..] =$				
	111111,	11112,	11121,	1113
	11211,	1122,	1131,	114
	12111,	1212,	1221,	123
	1311,	132,	141,	15
	21111,	2112,	2121,	213
	2211,	222,	231,	24
	3111,	312,	321,	33
	411,	42,	51,	6.

$^{5}V[1..] =$	11111,	1112,	1121,	113
	1211,	122,	131,	14
	2111,	212,	221,	23
	311,	32,	41,	5.

$^{7}V[1..] =$	1111111,	111112,	111121,	11113
	111211,	11122,	11131,	1114
	112111,	11212,	11221,	1123
	11311,	1132,	1141,	115
	121111,	12112,	12121,	1213
	12211,	1222,	1231,	124
	13111,	1312,	1321,	133
	1411,	142,	151,	16
	211111,	21112,	21121,	2113
	21211,	2122,	2131,	214
	22111,	2212,	2221,	223
	2311,	232,	241,	25
	31111,	3112,	3121,	313
	3211,	322,	331,	34
	4111,	412,	421,	43
	511,	52,	61,	7.

§. 44.

Recurrirendes Verfahren.

Die niedrigste Form enthielt nur erste Elemente, gedenkt man sich also die erste
telle derselben weg, so bleibt eine Form der um eins niedrigern Summe übrig, und
ar die niedrigste, welche sich zu derselben aus den gegebenen Elementen erzeugen
ßt. Man erhöhete nun alle Stellen außer der ersten successiv, bis sie keiner Erhö-
ng mehr fähig waren, oder bis es unter ihnen keine vorletzte Stelle mehr gab, um
sdann auch der ersten Stelle der Form das nächsthöhere Element zu ertheilen, d. h.

man bildete, um die erste Ordnung zu erzeugen, den Inbegriff aller Variationsformen zur nächstniedrigeren Summe, und setzte ihnen das erste Element vor. Allgemein, indem man die erste Stelle mit einem hten Elemente erhöhete, um die niedrigste Form der hten Ordnung abzuleiten, besetzte man alle folgenden Stellen mit lauter ersten Elementen, oder, man bildete die niedrigste Form zur anfänglich gefoderten Summe weniger h, und setzte ihr das hte Element vor. Die folgenden Stellen, welche also jene niedrigste Form bilden, erhöhete man darauf so lange, bis kein vorletztes Element mehr vorhanden war, ehe man die erste, mit einem hten Elemente besetzten Stelle angriff, um ihr das h + 1ste zu ertheilen, d. h. die hte Ordnung ist nichts, als der Inbegriff aller Variationsformen zur gefoderten Summe weniger h, denen das hte Element vorgesetzt ist. Ist also die anfänglich vorgeschriebene Summe $= n$, so ist die hte Ordnung $= {}^{n-h}_{h.}V[1..]$; in welchem Ausdrucke aber h höchstens $= n$ werden kann, wenn man nicht die Variationsformen zu einer negativen Summe aus lauter positiven Elementen, also etwas Unmögliches verlangt.

Der Ausdruck ${}^{0}V[1..]$ zeigt dann aber lauter unbesetzte Stellen, ${}^{0}_{n.}V[1..]$ also die Form n an. Die Recursionsformel ist daher folgende:

$$ {}^{n}V[1..] = {}^{n-1}_{1.}V[1..] + {}^{n-2}_{2.}V[1..] \ldots + {}^{n-r}_{r.}V[1..] \ldots + {}^{1}_{n-1}V[1..] + n. $$

Z. B.

$$ {}^{3}V[1..] = {}^{2}_{1.}V[1..] + {}^{1}_{2.}V[1..] + 3. $$

$$ = \left\{ \begin{array}{lll} + \; {}^{2}_{1.}V[1..] & = & 1.11, \; 1.2 \\ + \; {}^{2}_{2.}V[1..] & = & 2.1 \\ + \quad 3 & = & 3 \end{array} \right. $$

$$ {}^{5}V[1..] = {}^{4}_{1.}V[1..] + {}^{3}_{2.}V[1..] + {}^{2}_{3.}V[1..] + {}^{1}_{4.}V[1..] + 5. $$

$$ = \left\{ \begin{array}{lll} \quad {}^{4}_{1.}V[1..] & = & 1.1111, \; 1.112, \; 1.121, \; 1.13 \\ & & 1.211, \; 1.22, \; 1.31, \; 1.4 \\ + \; {}^{3}_{2.}V[1..] & = & 2.111, \; 2.12, \; 2.21, \; 2.3. \\ + \; {}^{2}_{3.}V[1..] & = & 3.11, \; 3.2 \\ + \; {}^{1}_{4.}V[1..] & = & 4.1 \\ + \quad 5 & = & 5 \end{array} \right. $$

Sind aber die Reihen, woraus sich diese Variations-Inbegriffe erzeugen sollen, alle identisch, so ist:

$$ {}^{n}_{p}C'[1..] = {}^{n-1}_{1,p}C[1..] + {}^{n-2}_{2,p}C[1..]\dots + {}^{n-r}_{r,q}C[1..]\dots + {}^{1}_{n-1,p}C[1..] + n. $$

Uebersicht aller abgeleiteten Recursionsformeln.

1. $P[1..n] = 1.P[\frac{1..n}{1}] + 2.P[\frac{1..n}{2}] + \dots + r.P[\frac{1..n}{r}]\dots + n.P[\frac{1..n}{n}]$

2. $P[1..n] = P[\frac{1..n}{1}].1 + P[\frac{1..n}{2}].2\dots + P[\frac{1..n}{r}].r\dots + P[\frac{1..n}{n}].n$

3. $\overset{k}{C}'[1..n] = 1.\overset{k-1}{C}'[2..n] + \overset{k}{C}'[2..n]$

4. $\overset{k}{C}'[1..n] = 1.\overset{k-1}{C}'[2..n] + 2.\overset{k-1}{C}'[3..n]\dots + r.\overset{k-1}{C}'[(r+1)..n]\dots + (n-(k-1)).\overset{k-1}{C}'[(n-(k-2))..n]$

5. $\overset{k}{C}'[1..n] = \overset{k}{C}'[2..n] + 1.\overset{k-1}{C}'[3..n]\dots + (1..r).\overset{k-r}{C}'[(r+2)..n]\dots + (1..k)\overset{0}{C}'.$

6. $\overset{k}{C}'[1..n] = \overset{k}{C}'[1..(n-1)] + \overset{k-1}{C}'[1..(n-1)].n$

7. $\overset{k}{C}'[1..n] = \overset{k-1}{C}'[1..(n-1)].n + \dots + \overset{k-1}{C}'[1..(n-r)].(n-(r-1)) + \dots + \overset{k-1}{C}'[1..(k-1)].k$

8. $\overset{k}{C}'[1..n] = \overset{k}{C}'[1..(n-1)] + \dots + \overset{k-r}{C}'[1..(n-(r+1))](n-(r-1))..n + \dots + \overset{0}{C}'.(n-(k-1))..n$

9. $\overset{k}{C}'[1..n] = \overset{k}{C}'[1..(n+1)] - \overset{k-1}{C}'[1..n](n+1)$

10. $\overset{k}{C}'[1..n] = \overset{k}{C}'[1..(n+1)] - \ldots + (-1)^h \overset{k-h}{C}'[1..(n+1)](n+1)^h \ldots + (-1)^k \overset{0}{C}'[1..(n+1)].(n+1)^k$

11. $\overset{k}{C}'[1..n] = \overset{k}{C}'[1..(n+r)] - \ldots - \overset{k-1}{C}'[1..(n+h-1)](n+h) \ldots - \overset{k-1}{C}'[1..(n+r-1)].(n+r)$

12. $\overset{k}{C}'[1..n] = \dfrac{\overset{k+1}{C}'[1..(n+1) - \overset{k+1}{C}'[1..n]}{n+1}$

13. $\overset{k}{C}'[1..n] = \overset{k+1}{C}'[1..(n+1)](n+1)^{-1} - \ldots + (-1)^{h-1} \overset{k+h}{C}'[1..(n+1)](n+1)^{-h} \ldots + (-1)^{n-k} \overset{n+1}{C}'[1..(n+1)](n+1)^{n-k+1}$

14. $\overset{k}{C}'[1..n] = \dfrac{\overset{k+r}{C}'[1..(n+r) - \ldots - \overset{k+h}{C}'[1..(n+h-1)](n+r)..(n+h+1) - \ldots - \overset{k+r}{C}'[1..(n+r-1)]}{(n+r).(n+r-1)\ldots(n+1)}$

15. $\overset{k}{C}[1..n] = 1.\overset{k-1}{C}[1..n] + \overset{k}{C}[2..n]$

16. $\overset{k}{C}[1..n] = 1.\overset{k-1}{C}[1..n] + 2.\overset{k-1}{C}[2..n] \ldots + r.\overset{k-1}{C}[r..n] \ldots + n.\overset{k-1}{C}[n]$

17. $\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[2..n] + 1.\overset{k-1}{C}[2..n] \ldots + 1^r \overset{k-r}{C}[2..n] \ldots + 1^k \overset{0}{C}[2..n]$

18. $\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k-1}{C}[1..n].n + \overset{k}{C}[1..(n-1)]$

19. $\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k-1}{C}[1..n].n + \overset{k-1}{C}[1..(n-1)].(n-1) \ldots + \overset{k-1}{C}[1..(n-r)].n-r] \ldots \overset{k-1}{C}[1].1$

20. $\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[1..(n-1)] + \overset{k-1}{C}[1..(n-1)].n \ldots + \overset{k-r}{C}[1..(n-1)]n^r \ldots + \overset{0}{C}[1..(n-1)].n^k$

$$21.\ \overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[1..(n+1)] - \overset{k-1}{C}[1..(n+1)].(n+1)$$

$$22.\ \overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[1..(n+1)] - \ldots + (-1)^{h}\overset{k-h}{C}[1..(n+h-1)](n+1)..(n+h)\ldots + (-1)^{k}\overset{0}{C}[1..(n+k)](n+1)..(n+k)$$

$$23.\ \overset{k}{C}[1..n] = \overset{k}{C}[1..(n+r)] - \overset{k-1}{C}[1..(n+1)](n+1)\ldots - \overset{k-1}{C}[1..(n+h)].(n+h)\ldots - \overset{k-1}{C}[1..(n+r)].(n+r)$$

$$24.\ \overset{k}{C}[1..n] = \frac{\overset{k+1}{C}[1..n] - \overset{k+1}{C}[1..(n-1)]}{n}$$

$$25.\ \overset{k}{C}[1..n] = \frac{\overset{k+1}{C}[1..n]1.2..(n-1) - \ldots + (-1)^{h-1}\overset{k+h}{C}[1..(n-h+1)].1.2..(n-h)\ldots + (-1)^{n-1}\overset{k+n}{C}[1.]}{n.(n-1)\ldots 2.1}$$

$$26.\ \overset{k}{C}[1..n] = \frac{\overset{k+r}{C}'[1..n] - \overset{k+r}{C}'[1..(n-1)]\ldots - \overset{k+r-h}{C}[1..(n-1)].n^{h}\ldots - \overset{k+1}{C}[1..(n-1)].n^{r-1}}{n^{r}}$$

$$27.\ {}^{n}\overset{k}{C}'[q..] = {}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}'[(q+1)..] + {}^{n}\overset{k}{C}'[(q+1)..]$$

Für $q = 1$ ist:

$$28.\ {}^{n}\overset{k}{C}'[1..] = {}^{n-1}_{1.}\overset{k-1}{C}'[2..] + {}^{n}\overset{k}{C}'[2..]$$

$$29.\ {}^{n}\overset{k}{C}'[q..] = {}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}'[(q+1)..] + {}^{n-(q+1)}_{(q+1).}\overset{k-1}{C}'[(q+2)..]\ldots + {}^{n-(q+h)}_{(q+h).}\overset{k-1}{C}'[(q+h+1)..]\ldots$$

Für $q = 1$ ist:

$$30.\ {}^{n}\overset{k}{C}'[1..] = {}^{n-1}_{1.}\overset{k-1}{C}'[2..] + {}^{n-2}_{2.}\overset{k-1}{C}'[3..]\ldots + {}^{n-h}_{h.}\overset{k-1}{C}'[(h+1)..]\ldots$$

31. $${}^{n}\overset{k}{C}[q..] = {}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}[q..] + {}^{n}\overset{k}{C}[(q+1)..]$$

Für $q = 1$ ist:

32. $${}^{n}\overset{k}{C}[1..] = {}^{n-1}_{1.}\overset{k-1}{C}[1..] + {}^{n}\overset{k}{C}[2..]$$

33. $${}^{n}\overset{k}{C}[q..] = {}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{C}[q..] + {}^{n-(q+1)}_{(q+1).}\overset{k-1}{C}[(q+1)..]\ldots + {}^{n-(q+r)}_{(q+r).}\overset{k-1}{C}[(q+r)..]\ldots$$

Für $q = 1$ ist:

34. $${}^{n}\overset{k}{C}[1..] = {}^{n-1}_{1.}\overset{k-1}{C}[1..] + {}^{n-2}_{2.}\overset{k-1}{C}[2..]\ \ldots + {}^{n-r}_{r.}\overset{k-1}{C}[r..]\ldots$$

35. $${}^{n}\overset{k}{C}[q..] = {}^{n}\overset{k}{C}[(q+1)..] + \ldots + {}^{n-hq}_{q+h}\overset{k-h}{C}[(q+1)..]\ldots + {}^{n-(k-1)q}_{q+k-1}\overset{1}{C}[(q+1)..]$$

Für $q = 1$ ist:

36. $${}^{n}\overset{k}{C}[1..] = {}^{n}\overset{k}{C}[2..] + \ldots + {}^{n-h}_{1+h}\overset{k-h}{C}[2..]\ldots + {}^{n-(k-1)}_{1+k-1}\overset{1}{C}[2..]$$

37. $${}^{n}C[1..] = {}^{n-1}_{r.}C[1..] + {}^{n}C[2..]$$

38. $${}^{2n}C[1..] = {}^{2n-1}_{1.}C[1..]\ldots + {}^{2n-r}_{r.}C[r..]\ldots + {}^{n}_{n.}C[n..] + 2n$$

oder:

$${}^{2n+1}C[1..] = {}^{2n}_{1.}C[1..]\ldots + {}^{2n-(r-1)}_{r.}C[r..]\ldots + {}^{n+1}_{n.}C[n..] + (2n+1)$$

39. $${}^{n}C[1..] = {}^{n}C[2..] + \ldots + {}^{n-r}_{1+r}C[2..]\ldots + {}^{2}_{1+n-2}C[2..] + 1^{n}$$

40. $$\overset{k}{V}[1..n] = 1.\overset{k-1}{V}[1..n] + 2.\overset{k-1}{V}[1..n]\ldots + r.\overset{k-1}{V}[1..n]\ldots + n.\overset{k-1}{V}[1..n]$$

41. $\overset{k}{V}[1..n] = \overset{k-1}{V}[1..n].1 + \overset{k-1}{V}[1..n].2 \ldots + \overset{k-1}{V}[1..n].r \ldots + \overset{k-1}{V}[1..n].n$

42. ${}_{p}\overset{k}{C}[1..n] = 1.{}_{p}\overset{k-1}{C}[1..n] + 2.{}_{p}\overset{k-1}{C}[1..n] \ldots + r.{}_{p}\overset{k-1}{C}[1..n] \ldots + n.{}_{p}\overset{k-1}{C}[1..n]$

43. ${}_{p}\overset{k}{C}[1..n] = {}_{p}\overset{k-1}{C}[1..n].1 + {}_{p}\overset{k-1}{C}[1..n].2 \ldots + {}_{p}\overset{k-1}{C}[1..n].r \ldots + {}_{p}\overset{k-1}{C}[1..n].n$

44. ${}^{n}\overset{k}{V}[q..] = {}^{n-q}_{q.}\overset{k-1}{V}[q..] \ldots + {}^{n-(q+r)}_{(q+r).}\overset{k-1}{V}[q..] \ldots {}^{(k-1)q}_{n-(k-1)q.}\overset{k-1}{V}[q..]$

Für $q=1$ ist:

45. ${}^{n}\overset{k}{V}[1..] = {}^{n-1}_{1.}\overset{k-1}{V}[1..] \ldots + {}^{n-r}_{r.}\overset{k-1}{V}[1..] \ldots + {}^{k-1}_{n-(k-1)}\overset{k-1}{V}[1..]$

46. ${}^{n}\overset{k}{V}[q..] = {}^{n-q}\overset{k-1}{V}[q..].q \ldots + {}^{n-(q+r)}\overset{k-1}{V}[q..](q+r) \ldots + {}^{(k-1)q}\overset{k-1}{V}[q..](n-(k-1)q)$

Für $q=1$ ist:

47. ${}^{n}\overset{k}{V}[1..] = {}^{n-1}\overset{k-1}{V}[1..].1 \ldots + {}^{n-r}\overset{k-1}{V}[1..].r \ldots + {}^{k-1}\overset{k-1}{V}[1..].(n-(k-1))$

48. ${}^{n}_{p}\overset{k}{C}[q..] = {}^{n-1}_{1,p}\overset{k-1}{C}[q..] \ldots + {}^{n+(q+r)}_{(q+r).p}\overset{k-1}{C}[q..] \ldots + {}^{(k-1)q}_{n-(k-1)q.p}\overset{k-1}{C}[q..]$

Für $q=1$ ist:

49. ${}^{n}_{p}\overset{k}{C}[1..] = {}^{n-1}_{1.p}\overset{k-1}{C}[1..] \ldots + {}^{n-r}_{r.p}\overset{k-1}{C}[1..] \ldots + {}^{k-1}_{n-(k-1).p}\overset{k-1}{C}[1..]$

50. ${}^{n}_{p}\overset{k}{C}[q..] = {}^{n-q}_{p}\overset{k-1}{C}[q..].q \ldots + {}^{n-(q+r)}_{p}\overset{k-1}{C}[q..].(q+r) \ldots {}^{(k-1)q}_{p}\overset{k-1}{C}[q..](n-(k-1)q)$

Für $q = 1$ ist:

$$51.\ {}^{n}_{p}\overset{k}{C}[1..] = {}^{n-1}_{p}\overset{k-1}{C}[1..].1... + {}^{n-r}_{p}\overset{k-1}{C}[1..].r... + {}^{k-1}\overset{k-1}{C}[1..](n-(k-1))$$

$$52.\ {}^{n}V[1..] = {}^{n-1}_{1.}V[1..] + ... + {}^{n-r}_{r.}V[1..]... + {}_{(n-1).}^{1}V[1..] + n.$$

$$53.\ {}^{n}_{p}C[1..] = {}^{n-1}_{1.p}C[1..] + ... + {}^{n-r}_{r.p}C[1..]... + {}^{1}_{(n-1)p}C[1..] + n$$

Anwendungen

der

reinen Combinationslehre

auf die

Analysis.

Anwendungen der reinen Combinationslehre auf die Analysis.

Einleitung.

§. 45.

Begriff der Hauptgröße. Function. Reihe.

Schon in der Elementar-Arithmetik bedient man sich allgemeiner Zeichen, damit sich die Untersuchung nicht auf einzelne Fälle beschränke. Man beweist z. B. nicht, daß $(4^2)^3 = 4^6$, daß $(2^4)^{\frac{3}{2}} = 2^6$, sondern allgemein, daß $(a^r)^n = a^{rn}$ ist; mögen nun a, r und n beliebige Zahlen seyn, der Satz, daß eine Potenz zu einer andern Dignität erhoben, nichts anders, als eine Potenz desselben Grundfactors ist, welche zum Exponenten das Product der beiden ersten Exponenten hat, bleibt für alle wahr. Unter dem Zeichen a^b verstehet man jede Potenz von a, man verstehet unter ab ein Product aus jeden beliebigen zwei Zahlen, unter log. a den Logarithmen irgend jeder Zahl u. s. f. Setzt man nun nach und nach für diese Zeichen bestimmte Werthe, oder Zahlen, so wird man successiv alle die einzelnen Fälle erhalten, welche in jenen allgemeinen Ausdrücken enthalten sind.

Aber man kann und muß unter diesen allgemeinen Zeichen in den daraus zusammengesetzten Ausdrücken einen wesentlichen Unterschied machen. Der Ausdruck a^b zeigt nicht allein eine jede Potenz von a an, sondern er stellt auch alle diejenigen

Zahlen allgemein vor, welche auf die Potenz b erhoben sind, er bedeutet endlich drittens auch alle beliebige Zahlen, welche auf alle beliebige Potenzen erhoben sind. Soll der Ausdruck die erste Bedeutung haben, so gedenkt man sich für b alle bestimmte Werthe gesetzt, und man erhält dadurch Größen, welche alle den Grundfactor a haben, und jede eine gewisse Zahl zum Exponenten besitzen. So ist es auch mit dem zweiten, so auch mit dem dritten Falle.

Auf diese Weise kann man in jedem beliebigen aus allgemein ausgedrückten Größen zusammengesetzten Ausdrucke einzelne dieser Größen so betrachten, als wollte man für sie, während man den übrigen ihre Bedeutung läßt, successiv bestimmte Werthe substituiren, und dann heißen diese Größen die *Hauptgrößen* des Ausdrucks, dieser selbst aber die *Function* jener Hauptgrößen. Die übrigen Größen, welche ihre Bedeutung unabänderlich behalten sollen, heißen *Nebengrößen*, und werden gewöhnlich mit den ersten Buchstaben des Alphabets, a, b, c... bezeichnet, während man die Hauptgrößen mit den letzteren, x, y, z, anzudeuten pflegt.

Eine Function einer oder mehrerer Hauptgrößen ist also ein aus diesen Hauptgrößen und andern Nebengrößen auf irgend eine Art arithmetisch zusammengesetzter Ausdruck. *)

---

*) Ob man gleich für die Hauptgrößen einer Function nach und nach bestimmte Größen zu substituiren sich vorgesezt hat, wodurch die Function immer andere und andere Werthe bekommen muß, so ist es doch nicht passend, sowohl die Hauptgrößen, als die Function selbst *veränderliche Größen* zu nennen, welcher Begriff mehr für die Differentialrechnung aufbewahrt werden muß, wo man es erst mit *eigentlicher Veränderlichkeit*, mit der *fließenden Größe*, zu thun bekommt. In dieser Wissenschaft, wo man sich vorstellt, oder doch wenigstens vorstellen sollte, die fließende Größe durchlaufe nach einem bestimmten Gesetze *alle* Zustände, worin sie ihrem Gesetze gemäß kommen kann, muß man sich gedenken, die ursprünglich veränderlichen Größen, welche mit den Hauptgrößen in der Analysis übereinkommen, nehmen *jeden nur denkbaren* positiven und negativen Werth an, während die Substitutionen, welche man in der Analysis mit den Hauptgrößen vornimmt, meistentheils sehr beschränkt sind. Der Hauptzweck aller analytischen Untersuchungen ist aber die nachherige Anwendung bei der Differentialrechnung; man nimmt die Operationen mit den Functionen größestentheils nur deshalb vor, um die Resultate bei dem Differentialcalcul zu gebrauchen, d. h. um sich hernach die Hauptgrößen, also auch die Functionen als *veränderliche Größen* zu gedenken.

So sind z. B. die Ausdrücke: $a+bx^2$, $\frac{ax+bx^m}{n}$, $\frac{n}{a+x^m}$, a^x, log. x, Sin. x, Cos. x u. s. w. Functionen von x; $ax+by^n$, $\frac{xy^h + xmy^2}{\log. x}$ in dergleichen Functionen von x und y u. s. f.

Um eine beliebige Function einer oder mehrerer Hauptgrößen anzudeuten, bedient man sich der Zeichen: φ, χ, ψ, auch wohl f, F, indem man die Hauptgrößen, wovon sie Functionen seyn sollen, in einer Klammer dahinter setzt; so z. B. bedeuten: $\varphi(x)$, $\chi(x)$, $f(x)$ u. s. w. beliebige Functionen von x, die Zeichen $\varphi(x,y)$ und dergleichen Functionen von x und y u. s. w.

Nimmt man nun die Substitutionen gewisser bestimmter Werthe für die Hauptgröße wirklich vor, jedoch so, daß diese Werthe bei jeder einzelnen Substitution nicht willkührlich angenommen werden, sondern selbst regelmäßig nach einer gewissen Ordnung auf einander folgen, so bilden die einzelnen durch das Substituiren entstandenen Größen die Glieder einer **Reihe**. Man kann die zu substituirenden Werthe allgemein so annehmen, daß sie selbst eine **beliebige** Reihe bilden, indessen begnügt man sich mit der einfacheren Voraussetzung, daß diese Reihe die sogenannte arithmetische ist:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots\ a+hd.\ \ldots$$

wo der specielle Fall, daß $a=0$, $d=1$ oder die Reihe: $1, 2, 3 \ldots h \ldots$ ist, am häufigsten vorkommt.

Ist daher die gegebene Function von $x = \varphi(x)$, so ist die daraus entstehende Reihe:

$$\varphi(a) + \varphi(a+d) + \varphi(a+2d) \ldots + \varphi(a+hd) \ldots$$

oder für $a=0$, $d=1$,

$$\varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) \ldots \varphi(h)$$

Die hten Glieder einer solchen Reihe, wo man aber für h jedes andere Zeichen setzen kann, nennt man die **allgemeinen Glieder**, (terminos generales). Setzt man daher für die Hauptgröße die Werthe 0, 1, 2 ..., so ist die Function selbst der Terminus generalis. Man kann die Glieder der Reihen auch auf der negativen Seite fortsetzen, indem man im allgemeineren Falle für die Hauptgröße nach und nach $a-d$, $a-2d \ldots a-hd$, in dem specielleren aber $-1, -2 \ldots -h$ setzt.

Ist daher der Terminus generalis oder die Function bekannt, so hat es nie Schwierigkeiten, die Reihe selbst darzustellen.

Z. B. es sey die Function von $x = 3 + 2x^2$, welche wir y nennen wollen, und es werde gefodert, die Reihe, deren allgemeines Glied sie ist, bei der Annahme zu bilden, daß für x nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3 ... und auf der andern Seite -1, -2 ... substituirt werden sollen.

Das Anfangsglied entstehet, wenn man für x den Werth 0 setzt, das erste nach demselben, wenn man 1 für die Hauptgröße substituirt u. s. f. Setzt man also die substituirte Zahl über das Glied, welches aus ihrer Substitution entstanden ist, so zeigt diese zugleich den Rang des Gliedes der Reihe an.

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
.. 35.	21.	11.	5.	3.	5.	11.	21.	35...

Die Ursache, warum auf beiden Seiten gleiche Glieder stehen, ist die, weil $(-x)^2 = x^2$ ist, wenn man also für x z. B. den Werth -4 substituirt, so kommt dasselbe heraus, als wenn man dafür +4 setzte.

Eben so ist die Reihe, deren Terminus generalis $= 2 + 4x^2 - x$ ist, folgende:

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
.. 70.	41.	20.	7.	2.	5.	16.	35.	62...

welche man leicht auf beiden Seiten fortsetzen kann.

Ist das allgemeine Glied a^x, und sind die zu substituirenden Werthe: α, $\alpha + \delta$, $\alpha + 2\delta$.. so ist die Reihe:

$$a^{\alpha - h\delta} \ldots a^{\alpha - \delta} + a^{\alpha} + a^{\alpha + \delta} + a^{\alpha + 2\delta} \ldots a^{\alpha + h\delta}$$

oder für die einfachere Voraussetzung:

$$a^{-h} + .. a^{-1} + a^{0} + a^{1} + \ldots + a^{h}$$

oder

$$\frac{1}{a^h} + .. \frac{1}{a} + 1 + a, + a^2 .. + a$$

§. 46.

Begriff der Analysis.

Die Arithmetik ist die Wissenschaft von den Gesetzen der Zahlenverknüpfungen. So lange man sich diese einfach gedenkt, um mit ihnen zu operiren, so lange gehören die Untersuchungen in die Elementar-Arithmetik; nimmt man sie aber als zusammengesetzt an, werden sie als aus Theilen bestehend, als ein Aggregat mehrerer Einzelheiten gegeben, so befindet man sich im Gebiete der Analysis oder der allgemeinen Arithmetik. Der Begriff der Hauptgröße bringt sich, wie wir oben gesehen haben, bei jeder zusammengesetzten Zahl von selbst auf, und deshalb betrachtet man jeden zusammengesetzten Ausdruck in Beziehung auf eine oder mehrere Hauptgrößen, oder siehet ihn als eine Function derselben an.

Die Analysis ist die Wissenschaft von den Gesetzen der Verknüpfungen zusammengesetzter Zahlen, und ihr Haupt-Object ist die Function.

§. 47.

Von den verschiedenen Arten der Functionen.

Man kann die Functionen füglich in drei Hauptabtheilungen bringen, indem man sie in algebraische, transcendente und inexplicabele eintheilt. Algebraische Functionen sind solche, in denen mit der Hauptgröße nur Operationen der Elementar-Arithmetik, d. h. Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Potenziirung und Wurzelausziehung vorgenommen sind, so sind z. B. $a+x$, $ax+b$, gx^n, $x^m_n - bx$, $\frac{a}{x^m}$, $\sqrt{(a+bx-x^2)}$ und dergleichen algebraische Functionen von x. Ist aber die Function so beschaffen, daß die Hauptgröße im Exponenten vorkömmt, oder wird ein Sinus, Cosinus, die Tangente u. s. w. von der Hauptgröße verlangt, oder umgekehrt ein Bogen gefodert, dessen Sinus, Cosinus, Tangente u. s. w. die Hauptgröße ist, so nennt man die Function transcendent. Dahin gehören also auch die Logarithmen der Hauptgröße, denn man erhält sie aus der

Umkehrung der transcendenten Gleichung $y = a^x$. Z. B. folgende Ausdrücke: a^x, $h^{x^3 + bx^2 - x^2}$, Sin. x, Cos. $(a-x^2)$, Tang. $\left(\frac{mx-b}{c}\right)$, log. x, log. $\left(\frac{bx^2-x}{a}\right)$ und dergleichen sind transcendente Functionen der Hauptgröße x. Bei allen diesen Functionen kann man sich für die Hauptgröße jede beliebige Zahl gedenken, sey sie positiv oder negativ, ganz, gebrochen oder irrational, obgleich die Analysis Substitutionen der Art nicht vorzunehmen pflegt. Allein es giebt auch Functionen, wo man sich schlechterdings nur ganze Zahlen, ja, oft auch nur positive für die Hauptgröße substituirt gedenken kann, und diese Functionen wollen wir inexplicabele nennen. Dergleichen Functionen sind alle combinatorische Ausdrücke, z. B. $\overset{x}{C}[1 \ldots n]$. Hier kann man für x nur ganze positive Werthe annehmen, denn Combinationsformen, welche einer Klasse $\frac{1}{2}$ angehören, oder welche $\frac{1}{2}$ Elemente enthalten, ist ein ungereimter Begriff. Aehnliches gilt von ${}^{x}\overset{h}{C}[q..]$, wo x positiv oder negativ seyn kann, jenachdem q, oder das niedrigste Element angenommen wird. Ferner sind die Permutationszahlen, welche wir durch p bezeichnen, dergleichen Functionen, denn da $\overset{x}{p} = 1.2.3 \ldots (x-1).x$ ist, so ist klar, daß man hier für x nur ganze positive Werthe zu setzen berechtigt ist, indem ein Product, welches man aus bekannten und gegebenen Factoren dergestalt bilden soll, daß dieser Factoren z. B. $\frac{3}{4}$ sind, ist wieder etwas Ungereimtes. Hiezu würden auch die Potenzen gehören, wenn man sie so definiren wollte, wie freilich gewöhnlich geschiehet, daß sie ein Product aus gleichen Factoren sind.

Man theilt die algebraischen Functionen wieder in rationale und irrationale. Die ersteren enthalten keine Wurzelausziehungen, die mit der Hauptgröße vorgenommen sind, während diese mit solchen behaftet sind. So sind also z. B. ax^2, $\frac{a + bx^2 - x^3}{c - x^2}$, und dergleichen rationale Functionen von x, hingegen $\sqrt{(a + bx^n - dx^m)}$, $(a + bx^2)^{\frac{1}{n}}$ und dergleichen irrationale Functionen derselben Hauptgröße.

Die rationalen Functionen werden wieder in ganze und gebrochene ein-

getheilt. Rationale ganze Functionen von x sind solche, in denen x nie im Nenner vorkommt, während dieses bei den gebrochenen der Fall ist.

z. B. $ax^2 + b$, $ax^3 + bx^2 - cx + d$ u. dergl.

sind rationale ganze Functionen von x;

$\frac{a+bx}{x^2-1}$, $ax^{-3} + x$, $\frac{a + bx - cx^2 + dx^4}{\alpha + \beta x - \gamma x^3}$ u. s. w.

sind rationale gebrochene Functionen von x.

§. 48.

Independente und recurrirende Bestimmung der Glieder einer Reihe. Uebergang von der einen Bestimmung zur andern.

Schon in der Combinationslehre (§. 7.) haben wir gesehen, was man unter independenter und recurrirender Bestimmung im Allgemeinen zu verstehen habe. In wiefern dieses auf combinatorische Operationen Beziehung hat, haben wir im Bisherigen vollständig kennen gelernt, und gesehen, daß in diesen beiden Bestimmungs-Arten das Wesen der ganzen Combinationslehre bestehet. Eben so ist es in der Analysis. Man kann die Glieder einer gesetzmäßigen Reihe auf independentem und recurrirendem Wege zur Ableitung bringen. Der Terminus generalis der Reihe ist nichts anders, als formaler Ausdruck des independenten Gesetzes der Bildung. Die Recursionsformeln zur Berechnung der Glieder einer Reihe von Größen oder Zahlen, können, wie in der Combinationslehre sowohl vollständig seyn, als auch nur eine theilweise Recursion darstellen, d. h. sie können sowohl ein gewisses Glied einer Reihe von Größen oder Zahlen aus allen vorhergehenden zu berechnen lehren, als auch eine Regel darstellen, nach welcher man aus einigen früheren Gliedern, ja, nur aus einem ein nachfolgendes darstellen kann.

Die Analysis fodert, wie die Combinationslehre, beide Bestimmungs-Arten. Ob man aber bei einer analytischen Untersuchung zuerst auf die independente Bestimmung geräth, oder zur recurrirenden gelangt, das hängt lediglich von der jedesmaligen Natur des Gegenstandes und von der Art, wie man die Untersuchung anstellt, ab, ja, es ist oft nicht einmal möglich, und meistentheils sehr schwierig, beide Be-

stimmungs-Arten aus der Untersuchung selbst unmittelbar abzuleiten. Es kommt also ganz darauf an, zu zeigen, wie man den Uebergang von der einen Bestimmung zur andern bewirken könne.

Der formale Ausdruck des Gesetzes, wonach die Glieder einer gewissen Reihe gebildet werden, oder der Terminus generalis dieser Reihe kann aus einer, er kann aber auch aus mehreren Hauptgrößen zusammengesetzt seyn. Diese Glieder können nach ihren verschiedenen Hauptgrößen verschieden recurriren. Ein Ausdruck, der aus zwei Hauptgrößen, k und n, zusammengesetzt ist, kann sowohl in Absicht auf k, als auf n, endlich aber auch in Beziehung auf beide zugleich recurriren. Hat man daher zwei Größen, welche gleiche Hauptgrößen haben, aber auf verschiedene Weise recurriren, oder deren Recursionsformeln nicht identisch sind, so folgt daraus noch nicht, daß diese Größen auch verschiedene independente Ausdrücke haben, oder daß sie aus ihren Hauptgrößen auf verschiedene independente Weise zusammengesetzt sind. Aber Größen, deren independente Ausdrücke wirklich verschieden sind, können nicht auf eine und dieselbe Art recurriren, ihre Recursionsformeln müssen verschieden seyn. Umgekehrt folgt daraus, daß Größen, welche auf dieselbe Weise recurriren, oder deren Recursionsformeln identisch sind, auch ein und dasselbe independente Gesetz der Bildung haben müssen, d. h. daß auch ihre independente Ausdrücke gleich seyn müssen.

Sobald es sich daher findet, daß eine Größe, für welche man nur eine Recursionsformel hat, auf eben dieselbe Art recurrire, als eine andere, für welche der independente Ausdruck bekannt ist, so ist man berechtigt, zu schließen, daß sie in Absicht auf ihre Bildung nichts anders sey, als diese sowohl auf dem Wege der Independenz als der Recursion bekannten Größe.

Es ist nun erfoderlich, alle diejenigen Merkmale anzugeben, woran man die Uebereinstimmung zweier Recursionen erkennen kann. Die erste Bedingung ist, daß beide eine gleiche Anzahl von Hauptgrößen haben, weichen sie hierin von einander ab, so ist an eine Identität überall nicht zu denken. Zweitens müssen beide eine gleiche Anzahl von Gliedern haben, drittens endlich müssen gleich hohe Glieder in beiden auf gleiche Art aus den Hauptgrößen zusammengesetzt seyn. Um die Gleichheit zweier Recursionen zu erkennen, muß man nur auf die Hauptgrößen sehen, indem man sich

nun die Größen, welche in der Recursionsformel unabänderlich bleiben, oder um die Nebengrößen nicht bekümmert, diese haben auf die Identität keinen Einfluß.

Z. B. Es sind die beiden Recursionsformeln:

$$ {}^{n}\overset{k}{A} = {}^{n-1}\overset{k}{A}.n + {}^{n}\overset{k-1}{A} $$

und

$$ \overset{n}{R}^{k} = \overset{n-1}{R}^{k}.n + \overset{n}{R}^{k-1} $$

völlig einstimmig, denn in ihnen finden die drei Bestimmungen statt, welche bei jeder Identität zweier Recursionen erfoderlich sind. Aber beide sind auch mit der Recursionsformel

$$ {}^{k+g}\overset{n+h}{H} = {}^{k+g}\overset{n+h-1}{H}(n+h) + {}^{k+g-1}\overset{n+h}{H} $$

identisch, denn hier finden dieselben Bedingungen statt, obgleich in ihr noch zwei Größen g und h vorkommen, die aber während der Recursion immer dieselben bleiben, und also die zur Identität erfoderlichen Bedingungen nicht abändern. Wir wollen diese Nebengrößen Constanten nennen, da sie überall nicht verändert werden.

Hat man daher bei irgend einer analytischen Untersuchung die Glieder einer Reihe, ${}^{n}\overset{0}{A}$, ${}^{n}\overset{1}{A}$, ${}^{n}\overset{2}{A} \ldots {}^{n}\overset{k}{A} \ldots$ zu berechnen, und ist man dabei z. B. auf die Recursion:

$$ {}^{n}\overset{k}{A} = {}^{n-1}\overset{k-1}{A}.n + {}^{n-1}\overset{k}{A} $$

gekommen, so kann man schließen, daß ${}^{n}\overset{k}{A}$ nichts anders, als der Inbegriff aller Combinationsformen ist, welche sich aus gewissen Elementen zu einer gewissen Klasse bei verbotener Wiederholbarkeit der Elemente erzeugen lassen, denn für diesen Ausdruck hat man die Recursion:

$$ \overset{k}{C}'[1..n] = \overset{k-1}{C}'[1..(n-1)].n + \overset{k}{C}'[1..(n-1)] $$

Aber wollte man den Schluß machen, daß

$$ {}^{n}\overset{k}{A} = \overset{k}{C}'[1..n] $$

ist, so wäre dieses nicht allgemein genug, denn ${}^{n}\overset{k}{A}$ recurrirt auch eben so, wie $\overset{k+h}{C}$[1..(n+g)], wo h und g gewisse Constanten bedeuten. Aus der völligen Identität zweier Recursionen folgt nur, daß die beiden Größen ein und dasselbe Gesetz ihrer Bildung haben, nur, daß die Art der Zusammensetzung in beiden einerlei ist.

Will man nach erkannter Identität zweier Recursionen auf die der Größen selbst schließen, so muß man sich zu jeder Hauptgröße des gefundenen independenten Ausdrucks noch eine Constante hinzugefügt gedenken, und es hängt alsdann noch von der Natur des Gegenstandes ab, wie sich diese Constanten bestimmen, welches jedesmal auf folgende Art geschehen kann. Jede Recursion, oder diejenige Berechnungs-Art der Glieder einer Reihe, durch welche man aus frühern Gliedern spätere ableitet, setzt nothwendig voraus, daß man das erste oder zuweilen mehrere erste auch ohne die Recursion schon finden könne, denn diese Glieder kann sie nicht darstellen, weil es keine frühere giebt, aus welchen sie sie ableiten könnte.

Hat man daher aus der Identität zweier Recursionen auf die der independenten Ausdrücke geschlossen, und die erfoderlichen Constanten den Hauptgrößen hinzugefügt, so setze man für das allgemein angenommene Glied das bekannte erste, für welches jener independente Ausdruck eben so gut statt finden muß, und wodurch das Glied in eine Zahl oder bestimmte Größe übergehet, so wird man eine Gleichung haben, aus der man die Constanten zu bestimmen im Stande ist.

Durch diesen neuen und fruchtbaren Schluß, *) der eigentlich weiter nichts ist, als das gewöhnliche so vielfach getadelte Inductionsverfahren, nur in höchster Allgemeinheit ausgedrückt, und welchen ich den Schluß von der Identität zweier Recursionen genannt habe, kann man in der Analysis auf eine allgemeine und deutliche Art dasjenige zur Ableitung bringen, welches man ohne denselben nur mühevoll, und was der schlimmste Umstand ist, auf eine höchst unwissenschaftliche Weise, durch die gemeine Induction, darzustellen vermogte. Wir werden im Folgenden, obgleich es nur wenige analytische Betrachtungen sind, vielfältig Anwendung davon machen.

---

*) Man findet den Gegenstand in dieser Allgemeinheit zuerst in meiner Abhandlung: de utrisque analyseos recentioris determinandi rationibus etc. vorgetragen.

Auf diese Art ist also der Uebergang von der recurrirenden Bestimmung zur independenten im Allgemeinen gezeigt worden.

Was den Uebergang von der independenten Bestimmung zur recurrirenden betrifft, so ist er im Allgemeinen sehr leicht zu bewerkstelligen; soll aber die abzuleitende Recursionsformel gewissen Bedingungen entsprechen, so ist die Untersuchung zuweilen mit den größesten Schwierigkeiten verknüpft. Wir haben gesehen, wie leicht sich in der reinen Combinationslehre die recurrirenden Bestimmungen aus den independenten ableiten lassen, allein die Art und Weise dieser Recursionen war nirgend vorgeschrieben, wir suchten eine Recursion schlechthin. Bei Betrachtung der Variationen zu bestimmten Summen leiteten wir zwei Recursionsformeln für ${}^{n}\overset{k}{V}[q..]$ oder ${}^{n}_{p}\overset{k}{C}[q..]$ ab, allein eine solche, welche z. B. aus successiven Inbegriffen zur Summe $n-1$, $n-2$, ... sämtlich aber zur Klasse k aus den Elementen $0, 1, 2$ ... gebildet, den Inbegriff ${}^{n}_{p}\overset{k}{C}[0..]$ oder ${}^{n}\overset{k}{V}[0..]$ derivirt, stellte sich unmittelbar nicht dar. Wird eine Recursionsformel von dieser Gestalt verlangt, so sind, wie wir im Folgenden sehen werden, noch eigne analytische Kunstgriffe erfoderlich.

Zahlen allgemein vor, welche auf die Potenz b erhoben sind, er bedeutet endlich drittens auch alle beliebige Zahlen, welche auf alle beliebige Potenzen erhoben sind. Soll der Ausdruck die erste Bedeutung haben, so gedenkt man sich für b alle bestimmte Werthe gesetzt, und man erhält dadurch Größen, welche alle den Grundfactor a haben, und jede eine gewisse Zahl zum Exponenten besitzen. So ist es auch mit dem zweiten, so auch mit dem dritten Falle.

Auf diese Weise kann man in jedem beliebigen aus allgemein ausgedrückten Größen zusammengesetzten Ausdrucke einzelne dieser Größen so betrachten, als wollte man für sie, während man den übrigen ihre Bedeutung läßt, successiv bestimmte Werthe substituiren, und dann heißen diese Größen die *Hauptgrößen* des Ausdrucks, dieser selbst aber die *Function* jener Hauptgrößen. Die übrigen Größen, welche ihre Bedeutung unabänderlich behalten sollen, heißen *Nebengrößen*, und werden gewöhnlich mit den ersten Buchstaben des Alphabets, a, b, c... bezeichnet, während man die Hauptgrößen mit den letzteren, x, y, z, anzudeuten pflegt.

Eine Function einer oder mehrerer Hauptgrößen ist also ein aus diesen Hauptgrößen und andern Nebengrößen auf irgend eine Art arithmetisch zusammengesetzter Ausdruck. *)

---

*) Ob man gleich für die Hauptgrößen einer Function nach und nach bestimmte Größen zu substituiren sich vorgesetzt hat, wodurch die Function immer andere und andere Werthe bekommen muß, so ist es doch nicht passend, sowohl die Hauptgrößen, als die Function selbst *veränderliche Größen* zu nennen, welcher Begriff mehr für die Differentialrechnung aufbewahrt werden muß, wo man es erst mit *eigentlicher Veränderlichkeit*, mit der *fließenden Größe*, zu thun bekommt. In dieser Wissenschaft, wo man sich vorstellt, oder doch wenigstens vorstellen sollte, die fließende Größe durchlaufe nach einem bestimmten Gesetze *alle* Zustände, worin sie ihrem Gesetze gemäß kommen kann, muß man sich gedenken, die ursprünglich veränderlichen Größen, welche mit den Hauptgrößen in der Analysis übereinkommen, nehmen *jeden nur denkbaren* positiven und negativen Werth an, während die Substitutionen, welche man in der Analysis mit den Hauptgrößen vornimmt, meistentheils sehr beschränkt sind. Der Hauptzweck aller analytischen Untersuchungen ist aber die nachherige Anwendung bei der Differentialrechnung; man nimmt die Operationen mit den Functionen größestentheils nur deshalb vor, um die Resultate bei dem Differentialcalcul zu gebrauchen, d. h. um sich hernach die Hauptgrößen, also auch die Functionen als *veränderliche Größen* zu gedenken.

So sind z. B. die Ausdrücke: $a+bx^2$, $\frac{ax+bx^m}{n}$, $\frac{u}{a+x^m}$, a^x, log. x, Sin. x, Cos. x u. s. w. Functionen von x; $ax+by^n$, $\frac{xy^h + xmy^2}{\log. x}$ in dergleichen Functionen von x und y u. s. f.

Um eine beliebige Function einer oder mehrerer Hauptgrößen anzudeuten, bedient man sich der Zeichen: φ, χ, ψ, auch wohl f, F, indem man die Hauptgrößen, wovon sie Functionen seyn sollen, in einer Klammer dahinter setzt; so z. B. bedeuten: $\varphi(x)$, $\chi(x)$, $f(x)$ u. s. w. beliebige Functionen von x, die Zeichen $\varphi(x,y)$ und dergleichen Functionen von x und y u. s. w.

Nimmt man nun die Substitutionen gewisser bestimmter Werthe für die Hauptgröße wirklich vor, jedoch so, daß diese Werthe bei jeder einzelnen Substitution nicht willkührlich angenommen werden, sondern selbst regelmäßig nach einer gewissen Ordnung auf einander folgen, so bilden die einzelnen durch das Substituiren entstandenen Größen die Glieder einer Reihe. Man kann die zu substituirenden Werthe allgemein so annehmen, daß sie selbst eine beliebige Reihe bilden, indessen begnügt man sich mit der einfacheren Voraussetzung, daß diese Reihe die sogenannte arithmetische ist:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots\ a+hd.\ \ldots$$

wo der specielle Fall, daß $a=0$, $d=1$ oder die Reihe: $1, 2, 3 \ldots h \ldots$ ist, am häufigsten vorkommt.

Ist daher die gegebene Function von $x = \varphi(x)$, so ist die daraus entstehende Reihe:

$$\varphi(a) + \varphi(a+d) + \varphi(a+2d) \ldots + \varphi(a+hd) \ldots$$

oder für $a=0$, $d=1$,

$$\varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) \ldots \varphi(h)$$

Die hten Glieder einer solchen Reihe, wo man aber für h jedes andere Zeichen setzen kann, nennt man die allgemeinen Glieder, (terminos generales). Setzt man daher für die Hauptgröße die Werthe 0, 1, 2 ..., so ist die Function selbst der Terminus generalis. Man kann die Glieder der Reihen auch auf der negativen Seite fortsetzen, indem man im allgemeineren Falle für die Hauptgröße nach und nach $a-d$, $a-2d \ldots a-hd$, in dem specielleren aber $-1, -2 \ldots -h$ setzt.

oder, wenn man für $a+rd$ den Werth n setzt, so, daß $a = n-rd$ ist, so findet man:

$$n\overset{-r}{\mathfrak{F}}d = \frac{1}{n-rd\overset{r}{\mathfrak{F}}d} = \frac{1}{n-d\overset{r}{\mathfrak{F}}-d}$$

Wenn man in:

$$n\overset{k}{\mathfrak{F}}d = n(n+d)(n+2d)\ldots(n+(k-1)d)$$

für die Differenz d den Werth 0 setzt, so verwandelt sich die Facultät in eine Potenz, so, daß also

$$n\overset{k}{\mathfrak{F}}0 = n^k$$

Wir übergehen hier mehrere (mitunter freilich merkwürdige, allein meistentheils zwecklose) Beziehungen unter diesen Zahlen, theils, weil man sie in andern Schriften *) findet, theils weil es uns hier nur darum zu thun ist, solche Untersuchungen anzustellen, welche direct auf Combinationslehre Beziehung haben. Hiezu sind aber einige recurrirende Beziehungen unter den Facultäten erfoderlich, welche wir, da sie, gerade die wichtigsten Beziehungen, in andern Schriften nicht angetroffen werden, hier zur Ableitung bringen müssen.

---

*) Élémens d'Arithmétique universelle par C. Kramp. Cologne 1808. Chap. XXV. les factorielles. Krámp war der erste, welcher die Facultäten einer näheren Betrachtung unterworfen hat. Ferner kann man darüber mit vielem Nutzen nachlesen: Versuch einer allgemeinen Theorie der analytischen Facultäten von Dr. Crelle, Berlin, 1823, worin freilich seine „bestimmte Definition" der Facultäten nicht nachzuahmen seyn dürfte. Will man diese Ausdrücke auf beliebige Exponenten ausdehnen, so ist eine bestimmte Definition erfoderlich. Eine Definition aber, wenn sie diesen Namen verdienen soll, muß so beschaffen seyn, daß man vermöge ihrer das Definitum in jedem möglichen Falle darstellen könne. Eben so, wie hier, ist eine bestimmte Definition für die Potenzen erfoderlich, denn sollen sie Producte aus gleichen Factoren seyn, so sind die Ausdrücke a^{-m}, $a^{\frac{n}{m}}$ widersinnig. Eine bestimmte Definition über Potenzen findet man: Grundriß der reinen Mathematik, vom Hofr. B. F. Thibaut. 3te Aufl. Cap. 3. Es bedarf nur dieser, aber gehörig verallgemeinert, um auch für Facultäten eine bestimmte Definition zu haben, denn Potenzen sind nur specielle Fälle der Facultäten.

Es ist: $(k+1)d\,{}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{d} = (k+1)d.n(n+d)\ldots(n+(k-1)d)$

ferner: ${}^{n-d}\overset{k+1}{\mathfrak{F}}{}^{d} = (n-d).n.(n+d)\ldots(n+(k-1)d)$

addirt man beide Ausdrücke zusammen, so ist:

$$(k+1)d.{}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{d} + {}^{n-d}\overset{k+1}{\mathfrak{F}}{}^{d} = [(k+1)d + (n-d)].n.(n+d)\ldots(n+(k-1)d)$$
$$= n.(n+d)\ldots(n+(k-1)d).(k+kd)$$

also hat man:

$${}^{n}\overset{k+1}{\mathfrak{F}}{}^{d} = (k+1)d.{}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{d} + {}^{n-d}\overset{k+1}{\mathfrak{F}}{}^{d}$$

oder für $k+1$ den Werth k gesetzt, ist:

$${}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{d} = kd.{}^{n}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{d} + {}^{n-d}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{d}$$

Man findet für $d = 1$:

$${}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1} = k.{}^{n}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} + {}^{n-1}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1}$$

und für $d = -1$:

$${}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = -k.{}^{n}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + {}^{n+1}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1}$$

oder:

$${}^{n+1}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = {}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + k\,{}^{n}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1}$$

oder für $n+1$ den Werth n gesetzt

$${}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = {}^{n-1}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + k\,{}^{n-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1}$$

Man kann nun diese partielle Recursionsformeln eben so, wie bei den combinatorischen Beziehungen mehrerer Discerptionen unterwerfen, um daraus Totalrecursionsformeln zu erhalten. Discerpirt man die für Facultäten mit der Differenz 1, indem man jedesmal den Theil zerlegt, welcher den Factor k nicht hat, so erhält man zuerst:

$${}^{n-1}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1} = k.{}^{n-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} + {}^{n-2}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1}$$

ferner:

$${}^{n-2}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1} = k.{}^{n-2}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} + {}^{n-3}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1}$$

also zunächst:

$${}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1} = k.{}^{n}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} + k.{}^{n-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} + k.{}^{n-2}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} + {}^{n-3}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1}$$

Fährt man mit der Discerption fort, so wird man allgemein nach der rten auf den Ausdruck:

$${}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1} = k.{}^{n}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} + k.{}^{n-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} + \ldots k.{}^{n-r}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} + {}^{n-(r+1)}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1}$$

gekommen seyn. Die Basis, n, nimmt mit jedem Gliede um eine Einheit ab, ist man daher bis zur n-1ten Discerption gekommen, oder ist $r = n-1$, so sind die beiden aus der letzten Discerption entstandenen Glieder

$$k.{}^{1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} + {}^{0}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1} = k.{}^{1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1}$$

denn der eine der beiden Theile ist $= 0$, weil eine Facultät mit dieser Basis den Factor 0 in sich schließt.

Man hat daher folgende Totalrecursionsformel:

$$\frac{1}{k}.{}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1} = {}^{n}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} + {}^{n-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} \ldots + {}^{n-r}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} \ldots + {}^{1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1}$$

Discerpirt man aber den Theil der partiellen Recursionsformel, welcher den Factor k besitzt, so ist zuerst:

$$k.{}^{n}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} = k(k-1){}^{n}\overset{k-2}{\mathfrak{F}}{}^{1} + k.{}^{n-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1}$$

Ferner:

$$k(k-1).{}^{n}\overset{k-2}{\mathfrak{F}}{}^{1} = k.(k-1)(k-2).{}^{n}\overset{k-3}{\mathfrak{F}}{}^{1} + k(k-1).{}^{n-1}\overset{k-2}{\mathfrak{F}}{}^{1}$$

also zunächst

$${}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1} = {}^{n-1}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1} + k.{}^{n-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} + k(k-1).{}^{n-1}\overset{k-2}{\mathfrak{F}}{}^{1} + k(k-1)(k-2).{}^{n}\overset{k-3}{\mathfrak{F}}{}^{1}.$$

Man wird allgemein durch die hte Discerption die beiden Theile

$$k(k-1)\ldots(k-(h-2)).{}^{n}\overset{k-(h-1)}{\mathfrak{F}}{}^{1} = k(k-1)..(k-(h-1)).{}^{n}\overset{k-h}{\mathfrak{F}}{}^{1} + k(k-1)..k-(h-2){}^{n-1}\overset{k-(h-1)}{\mathfrak{F}}{}^{1}$$

erhalten haben, wobei man die Factoren, weil sie gleichfalls Facultäten sind, durch das Zeichen $\mathfrak{F}$ ausdrücken kann, so daß diese beiden Theile auch so dargestellt werden können:

$$ {}^{k}\overset{h-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} \cdot {}^{n}\overset{k-(h-1)}{\mathfrak{F}}{}^{1} = {}^{k}\overset{h}{\mathfrak{F}}{}^{-1} \cdot {}^{n}\overset{k-h}{\mathfrak{F}}{}^{1} + {}^{k}\overset{h-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} \cdot {}^{n-1}\overset{k-(h-1)}{\mathfrak{F}}{}^{1} $$

Ist endlich $k = h-1$, also $h = k+1$, so ist der erste dieser beiden Theile

$$ = {}^{k}\overset{k+1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} \cdot {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} = 0, \text{ da } {}^{k}\overset{k+1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = k(k-1)\dots(k-k) = 0 $$

der zweite ist

$$ {}^{k}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} \cdot {}^{n-1}\overset{0}{\mathfrak{F}}{}^{1} = {}^{k}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1}, \text{ da } {}^{n-1}\overset{0}{\mathfrak{F}}{}^{1} = 1 \text{ ist.} $$

Man hat daher:

$$ {}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1} = {}^{n-1}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1} + {}^{k}\overset{1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} \cdot {}^{n-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} \dots + {}^{k}\overset{h}{\mathfrak{F}}{}^{-1} \cdot {}^{n-1}\overset{k-h}{\mathfrak{F}} \dots + {}^{k}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} $$

Durch Discerption der andern partiellen Recursionsformel findet man:

$$ {}^{n-1}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = {}^{n-2}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + k \cdot {}^{n-2}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} $$

ferner:

$$ {}^{n-2}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = {}^{n-3}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + k \cdot {}^{n-3}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} $$

also zuerst:

$$ {}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = k \cdot {}^{n-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + k \cdot {}^{n-2}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + k \cdot {}^{n-3}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + {}^{n-3}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} $$

Man wird bei der $h$ten Discerption auf die beiden Theile:

$$ {}^{n-h}_{k.}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + {}^{n-h}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} $$

gekommen seyn, welche sich in:

$$ {}^{k-1}_{k.}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + {}^{k-1}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = {}^{k-1}_{k}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} $$

verwandeln, wenn man $h = n-(k-1)$ setzt, denn es ist ${}^{k-1}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = 0$.

Man hat daher folgende Totalrecursionsformel:

$$\frac{1}{k}.{}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = {}^{n-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + {}^{n-2}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} \dots + {}^{n-h}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} \dots + {}^{k-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1}$$

Zerlegt man aber jedesmal den Theil der partiellen Recursionsformel, welcher den Factor k enthält, so hat man:

$$k.{}^{n-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = k.{}^{n-2}\overset{k-1}{\mathfrak{F}} + k(k-1).{}^{n-2}\overset{k-2}{\mathfrak{F}}{}^{-1}$$

ferner:

$$k(k-1).{}^{n-2}\overset{k-2}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = k(k-1).{}^{n-3}\overset{k-2}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + k(k-1)(k-2).{}^{n-3}\overset{k-3}{\mathfrak{F}}{}^{-1}$$

also findet man zuerst:

$${}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = {}^{n-1}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + k.{}^{n-2}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + k(k-1).{}^{n-3}\overset{k-2}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + k(k-1)(k-2){}^{n-3}\overset{k-3}{\mathfrak{F}}{}^{-1}$$

Die hte Discerption wird die beiden Theile:

$$k(k-1)\dots(k-(h-2)).{}^{n-h}\overset{k-(h-1)}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + k(k-1)\dots(k-(h-1)).{}^{n-h}\overset{k-h}{\mathfrak{F}}{}^{-1}$$

darbieten, welche man auch folgendermaaßen darstellen kann:

$${}^{k}\overset{h-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1}\cdot{}^{n-h}\overset{k-(h-1)}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + {}^{k}\overset{h}{\mathfrak{F}}{}^{-1}\cdot{}^{n-h}\overset{k-h}{\mathfrak{F}}{}^{-1}$$

Ist $h = k$, so findet man diese beiden Theile:

$$= {}^{k}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1}\cdot{}^{n-k}\overset{1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + {}^{k}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1}\cdot{}^{n-k}\overset{0}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = {}^{k}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1}\cdot{}^{n-k}\overset{1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + {}^{k}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1}$$

weil ${}^{n-k}\overset{0}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = 1$ ist, und man hat daher folgende Totalrecursionsformel:

$${}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = {}^{n-1}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + {}^{k}\overset{1}{\mathfrak{F}}{}^{-1}\cdot{}^{n-2}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} \dots + {}^{k}\overset{h-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1}\cdot{}^{n-h}\overset{k-(h-1)}{\mathfrak{F}}{}^{-1} \dots + {}^{k}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1}$$

Setzt man in der Recursionsformel:

$${}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1} = k.{}^{n}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} + {}^{n-1}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1}$$

für n den Werth 1, so hat man:

$${}^{1}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1} = k.{}^{1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1},$$

weil ${}^{0}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1} = 0$ ist. Nun ist aber ${}^{1}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1}$ die Permutationszahl des kten Grades, welche wir schon früher durch $\overset{k}{p}$ angedeutet haben, man hat daher unter diesen Zahlen die Recursion:

$$\overset{k}{p} = k.\overset{k-1}{p}$$

erstes Beispiel von einer partiellen Recursionsformel, welche ein gewisses Glied nur aus einem, aus dem nächstvorhergehenden abzuleiten lehrt.

Auch diese Recursion kann vollständig gemacht werden, wenn man setzt:

$$\overset{k}{p} = (k-1).\overset{k-1}{p} + \overset{k-1}{p}$$

Denn es ist alsdann nach vollendeter Discerption:

$$\overset{k}{p} = (k-1)\overset{k-1}{p} + (k-2)\overset{k-2}{p} + \ldots + (k-h).\overset{k-h}{p} \ldots + 2\overset{2}{p} + 1.\overset{1}{p} + 1$$

Ein zweites Beispiel einer solchen Recursion geben die Potenzen mit ganzen positiven Exponenten, denn es ist:

$$a^n = a.a^{n-1}$$

also auch:

$$a^n = (a-1).a^{n-1} + a^{n-1}$$

und man findet nach vollendeter Discerption:

$$a^n = (a-1).[a^{n-1} + a^{n-2} \ldots + a^{n-h} \ldots + a^1 + a^0] + 1$$

welche Recursionsformel für $a = 2$ noch bedeutend vereinfacht wird:

$$2^n = 2^{n-1} + 2^{n-2} \ldots + 2^{n-h} \ldots + 2^1 + 2^0 + 1.$$

§. 50.

Bestimmung der Anzahl der Formen, welche bei den verschiedenen combinatorischen Operationen hervorgehen müssen.

Nach diesen Betrachtungen über die Facultäten sind wir im Stande, die Anzahl der Complexionen, welche bei den combinatorischen Operationen successiv erzeugt werden, ohne die Operation selbst zu vollführen, vorher zu bestimmen.

Bei den Permutationen kamen wir auf die Recursionsformel:

$$P[1..n] = 1.P\left[\frac{1..n}{1}\right] + \ldots + h.P\left[\frac{1..n}{h}\right] \ldots + n.P\left[\frac{1..n}{n}\right],$$

wo allgemein das hte Glied den Inbegriff aller Permutationsformen aus den verschiedenen Elementen 1, 2 ... n, unter denen aber das hte fehlt, und denen sämtlich dieses hte Element vorgesetzt ist, anzeigt. Jedes Glied dieser Recursion hat gleichviel Formen, nämlich so viel, als sich aus n-1 wirklich verschiedenen Elementen erzeugen lassen. Bezeichnen wir nun die Anzahl aller Formen, welche $P[1..n]$ in sich schließt, mit $SP[1..n]$, so ist die Anzahl derjenigen Formen, welche jedes Glied der Recursion in sich begreift, $= SP[1..(n-1)]$, und da dieser Glieder n vorhanden sind, so hat man:

$$SP[1..n] = n.SP[1..(n-1)]$$

Wir haben also eine recurrirende Beziehung unter den gesuchten Zahlen, die independente Regel der Erzeugung folgt hier schon von selbst, wie wir auch früher (§. 12) gesehen haben, allein wir umgingen dabei den Schluß der Identität zweier Recursionen, ob er gleich in der Ableitung versteckt lag. So wie $SP[1..n]$ recurrirt auch $\overset{n}{p}$, denn es ist: $\overset{n}{p} = n.\overset{n-1}{p}$ und folglich hat man, nachdem die Constante zu n hinzugefügt ist:

$$SP[1..n] = \overset{n+h}{p},$$

Um die Constante, h, zu bestimmen, bemerken wir, daß für $n = 1$, $SP[1] = 1$ ist. Man hat daher $\overset{1+h}{p} = 1$, woraus $h = 0$ folgt, da nur $\overset{1}{p} = 1$ seyn kann. Man hat daher, wie wir schon oben fanden:

$$SP[1..n] = \overset{n}{p}$$

Wie sich die Anzahl der Formen ableiten läßt, wo sich unter den Elementen gleiche befinden, haben wir gleichfalls schon im §. 12 gesehen, und gefunden, daß diese Zahl, wenn sich unter den p Elementen r gleiche befanden, $= \frac{\overset{n}{p}}{\overset{r}{p}}$ sey. Wir können, der Bezeichnung der Potenzen analog, den Bruch $\frac{1}{\overset{r}{p}}$ durch $\overset{-r}{p}$ andeuten, so,

daß also $\frac{\overset{n}{p}}{\underset{p}{\overset{r}{-}}} = \overset{n-r}{p} \cdot p.$ Man findet demgemäß die Anzahl aller Permutationsformen, die sich aus n Elementen, worunter sich r gleiche der einen Höhe, h gleiche einer andern Höhe befinden, so, daß alle übrigen n-(r+h) wirklich verschieden von einander sind, $= \overset{n}{p}. \overset{-r}{p}. \overset{-h}{p}.$ u. s. w.

Unter den Combinationen an sich bei verbotener Wiederholbarkeit der Elemente fanden wir folgende Recursionsformel:

$$\overset{k}{C'}[1..n] = \overset{k-1}{C'}[1..(n-1)], n + \overset{k}{C'}[1..(n-1)]$$

und man hat daher, wenn $S\overset{k}{C}[1..n]$ die Anzahl aller Formen von $\overset{k}{C'}[1..n]$ bedeutet:

$$S\overset{k}{C'}[1..n] = S\overset{k-1}{C'}[1..(n-1)] + S\overset{k}{C'}[1..(n-1)]$$

oder wenn man statt $S\overset{k}{C'}[1..n]$ das leichter zu übersehende Zeichen ${}^{n}\overset{k}{A}$ gebraucht:

$${}^{n}\overset{k}{A} = {}^{n-1}\overset{k-1}{A} + {}^{n-1}\overset{k}{A}$$

Ganz auf dieselbe Art würden auch die Facultäten mit der Differenz -1 recurriren,

$${}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = k. {}^{n-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + {}^{n-1}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1},$$

wenn nicht in dem ersten Gliede der Recursionsscale der Factor k befindlich wäre. Dividirt man aber alle Glieder dieser Gleichung durch $\overset{k}{p}$, oder multiplicirt sie mit $\overset{-k}{p}$, so ist:

$$\overset{-k}{p}. {}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = \overset{-(k-1)}{p}. {}^{n-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + \overset{-k}{p}. {}^{n-1}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1}$$

und in dieser Recursion sind die Glieder aus n und k auf dieselbe Art zusammengesetzt, wie die der oben gefundenen Recursionsformel, und man hat daher wegen der Identität derselben:

$$ {}^{n}\overset{k}{A} = S\overset{k}{C}'[1..n] = \overset{-(k+h)}{p.}\; {}^{n+g}\overset{k+h}{\mathfrak{B}}{}^{-1} $$

wo die beiden Constanten g und h noch zu bestimmen übrig sind.

Für $k = 1$ ist $S\overset{k}{C}'[1..n] = n$, denn $\overset{1}{C}'[1..n]$ stellt jedes der einzelnen n Elemente als Form dar. Man hat daher:

$$ n = \overset{-(h+1)}{p.}\; {}^{n+g}\overset{k+1}{\mathfrak{B}}{}^{-1} = {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}{}^{-1} $$

woraus folgt, daß sowohl h, als $g = 0$ seyn muß.

Es ist also allgemein:

$$ S\overset{k}{C}'[1..n] = \overset{-k}{p.}\; {}^{n}\overset{k}{\mathfrak{B}}{}^{-1} $$

Z. B.

$$ S\overset{3}{C}'[1..5] = \overset{-3}{p.}\; {}^{5}\overset{3}{\mathfrak{B}}{}^{-1} = \frac{5.4.3}{1.2.3} = 10. $$

$$ S\overset{3}{C}'[1..6] = \overset{-3}{p.}\; {}^{6}\overset{3}{\mathfrak{B}}{}^{-1} = \frac{6.5.4}{1,2.3} = 20. $$

$$ S\overset{4}{C}'[1..6] = \overset{-4}{p.}\; {}^{6}\overset{4}{\mathfrak{B}}{}^{-1} = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15. $$

$$ S\overset{2}{C}'[1..5] = \overset{-2}{p.}\; {}^{5}\overset{2}{\mathfrak{B}}{}^{-1} = \frac{5.4}{1.2} = 10. $$

$$ S\overset{5}{C}'[1..8] = \overset{-5}{p.}\; {}^{8}\overset{5}{\mathfrak{B}}{}^{-1} = \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} = 56. $$

$$ S\overset{1}{C}'[1..6] = \overset{-1}{p.}\; {}^{6}\overset{1}{\mathfrak{B}}{}^{-1} = 6. $$

$$ S\overset{6}{C}'[1..6] = \overset{-6}{p.}\; {}^{6}\overset{6}{\mathfrak{B}}{}^{-1} = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6} = 1. $$

$$ S\overset{4}{C}'[1..7] = \overset{-4}{p.}\; {}^{7}\overset{4}{\mathfrak{B}}{}^{-1} = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} = 35. $$

Bei Betrachtung der Combinationen bei gestatteter Wiederholbarkeit der Elemente erhielten wir folgende partielle Recursionsformel:

$$\overset{k}{C}[1..n] = \overset{k-1}{C}[1..n].n + \overset{k}{C}[1..(n-1)]$$

man hat daher unter den Zahlen, $S\overset{k}{C}[1..n]$ folgende recurrirende Beziehung:

$$S\overset{k}{C}[1..n] = S\overset{k-1}{C}[1..n] + S\overset{k}{C}[1..(n-1)]$$

oder, wenn man statt $S\overset{k}{C}$ das übersichtlichere Zeichen ${}^{n}\overset{k}{A}$ gebrauchen will.

$${}^{n}\overset{k}{A} = {}^{n}\overset{k-1}{A} + {}^{n-1}\overset{k}{A}$$

Mit dieser Recursion würde die für die Facultäten mit der Differenz 1, nämlich:

$${}^{n}\mathfrak{F}^{k|1} = k.\,{}^{n}\mathfrak{F}^{k-1|1} + {}^{n-1}\mathfrak{F}^{k|1}$$

identisch seyn, wenn in ihr nicht der Factor k das eine Glied behaftete. Dividirt man aber jedes Glied mit $\overset{k}{p}$, so ist:

$$p^{-k}.\,{}^{n}\mathfrak{F}^{k|1} = p^{-(k-1)}.\,{}^{n}\mathfrak{F}^{k-1|1} + p^{-k}.\,{}^{n-1}\mathfrak{F}^{k|1}$$

eine Recursionsformel, welche mit der für $S\overset{k}{C}[1..n]$ identisch ist. Man hat daher, wenn man die Constanten fingirt:

$$S\overset{k}{C}[1..n] = p^{-(k+h)}.\,{}^{n+g}\mathfrak{F}^{k+h|1}$$

Für $k = 1$ ist $S\overset{k}{C}[1..n] = n$

folglich

$$n = {}^{n}\mathfrak{F}^{1|1} = p^{-(k+1)}.\,{}^{n+g}\mathfrak{F}^{1+h|1}$$

woraus, wie oben, folgt, daß sowohl h als $g = 0$ ist, und man hat daher allgemein:

$$S\overset{k}{C}[1..n] = p^{-k}.\,{}^{n}\mathfrak{F}^{k|1}$$

welches Resultat mit dem früher gefundenen bis auf die Differenz einstimmig ist.

Z. B. Es ist:

$$S\overset{3}{C}[1..4] = \overset{-3}{\underset{p}{.}}\;{}^{4}\overset{3}{\mathfrak{F}}{}^{1} = \frac{4.5.6}{1.2.3} = 20.$$

$$S\overset{4}{C}[1..5] = \overset{-4}{\underset{p}{.}}\;{}^{5}\overset{4}{\mathfrak{F}}{}^{1} = \frac{5.6.7.8}{1.2.3.4} = 70.$$

$$S\overset{3}{C}[1..5] = \overset{-3}{\underset{p}{.}}\;{}^{5}\overset{3}{\mathfrak{F}}{}^{1} = \frac{5.6.7}{1.2.3} = 35.$$

$$S\overset{4}{C}[1, 2] = \overset{-4}{\underset{p}{.}}\;{}^{2}\overset{4}{\mathfrak{F}}{}^{1} = \frac{2.3.4.5}{1.2.3.4} = 5.$$

$$S\overset{1}{C}[1..5] = \overset{-1}{\underset{p}{.}}\;{}^{5}\overset{1}{\mathfrak{F}}{}^{1} = 5.$$

$$S\overset{6}{C}[1] = \overset{-6}{\underset{p}{.}}\;{}^{1}\overset{6}{\mathfrak{F}}{}^{1} = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4.5.6} = 1.$$

Die Betrachtung der Anzahl der Combinationen zu bestimmten Summen führt, besonders wenn man das niedrigste Element allgemein eine positive oder negative Zahl seyn läßt, zu sehr verwickelten Untersuchungen, welche hier nicht an ihrem Orte seyn dürften.

Die Variationen leiteten uns auf folgende Recursionsformel:

$$\overset{k}{V}[1..n] = 1.\overset{k-1}{V}[1..n] + \ldots + h.\overset{k-1}{V}[1..n] \ldots + n.\overset{k-1}{V}[1..n]$$

Man hat daher:

$$S\overset{k}{V}[1..n] = S\overset{k-1}{V}[1..n] \ldots + S\overset{k-1}{V}[1..n] \ldots + S\overset{k-1}{V}[1..n]$$

Jedes der Glieder dieser Recursionsformel, deren überhaupt n vorhanden sind, stellt dieselbe Zahl vor, und man hat daher:

$$S\overset{k}{V}[1..n] = n.\,S\overset{k-1}{V}[1..n]$$

Aber auf dieselbe Art recurrirt auch die Potenz der Basis n mit dem Exponenten k, denn es ist:

$$n^{k} = n.n^{k-1}$$

und man hat daher allgemein:

$$S\overset{k}{V}[1..n] = (n+g)^{k+h}$$

Um die beiden Constanten g und h zu bestimmen, setze man k = 1, wodurch $\overset{k}{SV}[1..n] = n$ wird, so hat man:

$$(n+g)^{h+1} = n$$

woraus erhellet, daß g und h = 0 sind, so, daß man also erhält:

$$\overset{k}{SV}[1..n] = n^k$$

Z. B. Es ist:

$$\overset{3}{SV}[1, 2] = 2^3 = 8.$$
$$\overset{4}{SV}[1] = 1^4 = 1.$$
$$\overset{3}{SV}[1..4] = 4^3 = 64.$$
$$\overset{2}{SV}[1..5] = 5^2 = 25.$$
$$\overset{3}{SV}[1..5] = 5^3 = 125.$$

Besitzen die Reihen nicht alle gleichviel Elemente, so, daß allgemein die erste $\overset{1}{a}$, die zweite $\overset{2}{a}$, die nte $\overset{n}{a}$ Elemente habe, so ist aus §. 38 klar, daß man, um die Variationsformen aus den n Reihen zu erhalten, jeder der Variationsformen, welche aus den früheren n-1 Reihen erzeugt sind, jedes Element der nten Reihe beifügen muß; bezeichnet man daher die Anzahl aller Formen aus den ersten n-1 Reihen durch $\overset{n-1}{A}$, so hat man:

$$\overset{n}{A} = \overset{n}{a}\,\overset{n-1}{A}$$

welche Recursionsformel wieder mit der für die Permutationszahlen identisch ist, nur so, daß die successiven Factoren hier nicht 1, 2 ..., sondern $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}$ ... sind. Die Constante bestimmt sich hier = 0, denn man hat für n = 1, $\overset{n}{A} = \overset{1}{a}$

Es ist daher $\overset{n}{A} = \overset{1}{a}.\overset{2}{a}\ldots\overset{n}{a}$.

Z. B. Besitzt die erste Reihe 3, die zweite 2, die dritte 2 Elemente, so ist die Anzahl aller Formen $= 3.2.2 = 12$. Käme dazu noch eine Elementenreihe von 4 Elementen, so wäre die Anzahl aller Variationsformen $= 3.2.2.4 = 48$ u. s. w.

Die Variationen zu bestimmten Summen haben unter sich, wenn das niedrigste Element $= 1$ ist, folgende Recursion:

$$ {}^{n}\overset{k}{V}[1..] = {}^{n-1}_{1.}\overset{k-1}{V}[1..] + \ldots + {}^{n-h}_{h.}\overset{k-1}{V}[1..]\ldots + {}^{k-1}_{n-(k-1).}\overset{k-1}{V}[1..] $$

folglich hat man:

$$ S^{n}\overset{k}{V}[1..] = S^{n-1}\overset{k-1}{V}[1..] + \ldots + S^{n-h}\overset{k-1}{V}[1..]\ldots + S^{k-1}\overset{k-1}{V}[1..] $$

oder wenn man sich einfacherer Zeichen bedient:

$$ {}^{n}\overset{k}{A} = {}^{n-1}\overset{k-1}{A} + {}^{n-2}\overset{k-1}{A}\ldots + {}^{n-h}\overset{k-1}{A} + \ldots + {}^{k-1}\overset{k-1}{A}. $$

Wir fanden aber unter den Facultäten mit der Differenz -1 die recurrirende Beziehung:

$$ \frac{1}{k}.\,{}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = {}^{n-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} + {}^{n-2}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1}\ldots + {}^{n-h}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1}\ldots + {}^{k-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} $$

und diese Recursionsformel würde mit der obigen identisch seyn, wenn nicht in dem Ausdrucke ${}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1}$ der Factor $\frac{1}{k}$ vorhanden wäre. Multiplicirt man jedoch jedes Glied mit $\overset{-(k-1)}{p}$, so erhält man:

$$ \overset{-k}{p}\,{}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = \overset{-(k-1)}{p}.\,{}^{n-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1}\ldots + \overset{-(k-1)}{p}.\,{}^{n-h}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1}\ldots + \overset{-(k-1)}{p}.\,{}^{k-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} $$

eine Recursionsformel, welche mit der obigen vollkommen einstimmig ist, so, daß man berechtigt ist, zu schließen, es sey:

$$ {}^{n}\overset{k}{A} = S^{n}\overset{k}{V}[1..n] = \overset{-(k+h)}{p}.\,{}^{n+g}\overset{k+h}{\mathfrak{F}}{}^{-1} $$

Zur Bestimmung der beiden Constanten g und h setzen wir $k = 1$, woraus $S^{n}\overset{k}{V}[1..] = 1$ folgt, und man hat also:

$$1 = p^{-(h+1)} \cdot {}^{n+g}\overset{h-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} \text{ oder}$$

$${}^{n+g}\overset{k+1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = p^{k+1} = {}^{1}\overset{h+1}{\mathfrak{F}}{}^{1}$$

Sollen diese beiden Facultäten für jeden Werth der Hauptgröße n gleich seyn, so müssen ihre Exponenten zu 0 werden, woraus $h = -1$ folgt. Man könnte die Facultät ${}^{1}\overset{h+1}{\mathfrak{F}}{}^{1}$ auch $= {}^{h+1}\overset{h+1}{\mathfrak{F}}{}^{-1}$ setzen, welche mit ${}^{n+g}\overset{h+1}{\mathfrak{F}}{}^{-1}$ gleiche Differenz und gleiche Exponenten hat, und hieraus würde folgen, daß auch die Basen gleich seyn müßten, allein aus der Gleichung $h+1 = n+g$ kann so wenig h, noch g als Constante bestimmt werden, weil in ihren Ausdrücken die Hauptgröße n enthalten wäre.

Um nun auch die andere Constante, g, zu determiniren, setzen wir in dem Ausdrucke:

$$S^n\overset{k}{V}[1..n] = p^{-(k-1)} \cdot {}^{n+g}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1}$$

für n den Werth k, woraus $S^n\overset{k}{V}[1..] = 1$ wird, indem ${}^{k}\overset{k}{V}[1..]$ nur die eine Form 1^k darbietet. Ist aber

$$p^{-(k-1)} \cdot {}^{k+g}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = 1 \text{ oder}$$

$${}^{k+g}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = p^{k-1} = {}^{k-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1}$$

so folgt hieraus, da in beiden Facultäten sowohl die Differenz, als auch der Exponent einerlei ist, daß auch die Basen gleich seyn müssen, woraus $k+g = k-1$ oder $g = -1$ folgt. Man hat daher:

$$S^n\overset{k}{V}[1..] = p^{-(k-1)} \cdot {}^{n-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1}$$

Z. B.

$$S^6\overset{3}{V}[1..] = p^{-2} \cdot {}^{5}\overset{2}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = \frac{5.4}{1.2} = 10.$$

$$S^7\overset{4}{V}[1..] = \overset{-3}{p}\cdot {}^{6}\overset{3}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = \frac{6.5.4}{1.2.3} = 20.$$

$$S^{10}\overset{5}{V}[1..] = \overset{-4}{p}\cdot {}^{9}\overset{4}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} = 126.$$

$$S^9\overset{3}{V}[1..] = \overset{-2}{p}\cdot {}^{8}\overset{2}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = \frac{8.7}{1.2} = 28.$$

Soll bei den Variationsformen zu bestimmten Summen das niedrigste Element dasjenige seyn, dessen Index o ist, so hat man die Recursionsformel.

$$ {}^{n}\overset{k}{V}[o..] = \underset{o.}{\overset{n}{}}\overset{k-1}{V}[o..]\ldots + \underset{h.}{\overset{n-h}{}}\overset{k-1}{V}[o..]\ldots + \underset{n.}{\overset{o}{}}\overset{k-1}{V}[o..]$$

so, daß also:

$$S^n\overset{k}{V}[o..] = S^n\overset{k-1}{V}[o..]\ldots + S^{n-h}\overset{k-1}{V}[o..]\ldots + S^o\overset{k-1}{V}[o..]$$

oder wenn man sich zur leichteren Uebersicht statt $S^n\overset{k}{V}[o..]$ des Zeichens ${}^{n}\overset{k}{A}$ bedient, ist:

$${}^{n}\overset{k}{A} = {}^{n}\overset{k-1}{A} + {}^{n-1}\overset{k-1}{A}\ldots + {}^{n-h}\overset{k-1}{A}\ldots + {}^{1}\overset{k-1}{A} + {}^{o}\overset{k-1}{A}.$$

Man hat aber die Recursionsformel:

$$\frac{1}{k}\cdot {}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1} = {}^{n}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} + {}^{n-1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1}\ldots + {}^{n-h}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1}\ldots + {}^{1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1} + {}^{o}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1}$$

oder wenn jedes Glied durch $\overset{k-1}{p}$ dividirt wird:

$$\overset{-k}{p}\cdot {}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{1} = \overset{-(k-1)}{p}\cdot {}^{n}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1}\ldots + \overset{-(k-1)}{p}\cdot {}^{n-h}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1}\ldots + \overset{-(k-1)}{p}\cdot {}^{o}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1}$$

und man hat daher:

$${}^{n}\overset{k}{A} = S^n\overset{k}{V}[o..] = \overset{-(k+h)}{p}\cdot {}^{n+g}\overset{k+h}{\mathfrak{F}}{}^{1}$$

Für $n = o$ hat man $S^n\overset{k}{V}[o..] = 1$, d. h.

$$1 = \overset{-(k+h)}{p}\cdot {}^{g}\overset{k+h}{\mathfrak{F}}{}^{1} \text{ oder:}$$

$${}^{g}\overset{k+h}{\mathfrak{F}}{}^{1} = \overset{k+h}{p} = {}^{1}\overset{k+h}{\mathfrak{F}}{}^{1}$$

woraus folgt, daß $g = 1$ ist, denn da in beiden Facultäten Differenz und Exponent einerlei ist, so müssen es auch die Basen seyn. Setzt man nun ferner in:

$$S^n\overset{k}{V}[0..] = {}^{-(k+h)}_{p\,.}\;{}^{n+1}\overset{k+h}{\mathfrak{F}}{}^{1}$$

für k den Werth 1, so ist $S^n\overset{k}{V}[0..] = 1$, und daher

$$1 = {}^{-(h+1)}_{p\,.}\;{}^{n+1}\overset{h+1}{\mathfrak{F}}{}^{1} \text{ oder:}$$

$${}^{n+1}\overset{h+1}{\mathfrak{F}}{}^{1} = {}^{h+1}_{p}\;{}^{1}\overset{h-1}{\mathfrak{F}}{}^{1}$$

Da hier wieder zwei Facultäten gleich seyn sollen, welche verschiedene Basen haben, so müssen ihre Exponenten $= 0$ seyn, woraus man $h = -1$ findet, so, daß also:

$$S^n\overset{k}{V}[0..] = {}^{-(k-1)}_{p\,.}\;{}^{n+1}\overset{k-1}{\mathfrak{F}}{}^{1}$$

Z. E.

$$S^4\overset{5}{V}[0..] = {}^{-2}_{p\,.}\;{}^{5}\overset{2}{\mathfrak{F}}{}^{1} = \frac{5.6}{1.2} = 15.$$

$$S^9\overset{2}{V}[0..] = {}^{-1}_{p\,.}\;{}^{10}\overset{1}{\mathfrak{F}}{}^{1} = 10.$$

$$S^5\overset{4}{V}[0..] = {}^{-3}_{p\,.}\;{}^{6}\overset{3}{\mathfrak{F}}{}^{1} = \frac{6.7.8}{1.2.3} = 56.$$

$$S^3\overset{3}{V}[0..] = {}^{-2}_{p\,.}\;{}^{4}\overset{2}{\mathfrak{F}}{}^{1} = \frac{4.5}{1.2} = 10.$$

Bei der Erzeugung aller Variationsformen, welche zu einer bestimmten Summe gehörig zu allen Klassen gebildet werden können, leiteten wir folgende Recursionsformel ab:

$${}^{n}V[1..] = {}^{n-1}_{1.}V[1..]\ldots + {}^{n-h}_{h.}V[1..]\ldots + {}^{n-(n-1)}_{(n-1)}V[1..] + n.$$

Man hat also:

$$S^nV[1..] = S^{n-1}V[1..]\ldots + S^{n-h}V[1..]\ldots + {}^{n-(n-1)}V[1..] + 1$$

Nun ist aber:

$$2^n = 2^{n-1} + 2^{n-2} \dots + 2^{n-h} \dots + 2^0 + 1$$

eine Recursionsformel, welche unter dieser Form mit der obigen nicht identisch seyn kann, weil sie $n+1$ Glieder enthält, während jene nur n besitzt. Diesem Umstande ist aber abzuhelfen, wenn man nur statt n den Werth $n-1$ setzt, wodurch sie

$$2^{n-1} = 2^{(n-1)-1} + 2^{(n-1)-2} \dots + 2^{(n-1)-h} \dots + 2^{(n-1)-(n-1)} + 1$$

wird, und jetzt ist sie mit der für $S^n V^r[1..]$ vollkommen einstimmig, so, daß also

$$S^n V[1..] = 2^{n-1+g}$$

Für $n=1$ ist $S^n V^r[1..] = 1$, folglich

$$2^g = 1, \text{ d. h. } g = 0, \text{ und daher}$$

$$S^n V[1..] = 2^{n-1}$$

3. E.

$$S^7 V^r[1..] = 2^6 = 64.$$

$$S^5 V[1..] = 2^4 = 16.$$

$$S^6 V[1..] = 2^5 = 32 \text{ u. s. w.}$$

Zweiter Abschnitt.

Anwendungen der Combinationslehre auf einige einfache Fälle der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

---

§. 51.

Begriff von Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Da, wo auf eine oder die andere Weise mehrere Fälle hervorgehen, so, daß dabei der Zufall jeden derselben erzeugt, da kann man einen solchen Fall nicht vorher bestimmen, gerade weil er zufällig ist; allein es ist immer möglich, die Wahrscheinlichkeit anzugeben, daß sich ein gewisser Fall unter mehreren der Anzahl nach bekannten Fällen ereigne.

Die Frage, ob überhaupt Zufall statt finde, oder ob alles, was geschiehet, nach bestimmten, obgleich dem unvollkommenen menschlichen Geiste nicht bekannten Naturgesetzen sich ereignet, gehört nicht hierher. Es läßt sich nicht läugnen, daß es viele giebt, welche dem Zufalle gern alles zuschreiben möchten, viele aber auch, welche mit dem Worte Naturgesetz großen Mißbrauch treiben. Uns kümmert das hier nicht, wir sagen, daß einen Umstand, welcher sich ereignet, so, daß sich gar kein Grund einsehen läßt, warum nicht eben so gut ein anderer eingetroffen ist, der Zufall erzeugt habe.

Die Wahrscheinlichkeit, daß unter mehreren Fällen, die sich ereignen können, einer oder einige von denen eintraten, die man er=

wartet, wird erkannt, wenn man die Anzahl dieser günstigen Fälle mit der aller möglichen vergleicht. Die Wahrscheinlichkeit ist daher das Verhältniß zweier Zahlen, und also wieder eine unbenannte Zahl.

Sind also überhaupt n Fälle möglich, unter denen sich k günstige oder solche befinden, die man erwartet, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich einer dieser günstigen Fälle ereignet, oder daß ein Fall, welcher eintreten muß, einer der erwünschten k Fälle ist, $= \frac{k}{n}$.

Die Zahl k kann nie größer seyn, als n, und daher ist die Wahrscheinlichkeit jederzeit ein echter Bruch. Wenn aber unter n Fällen k günstige sind, so befinden sich darunter n-k ungünstige, und die Wahrscheinlichkeit, daß einer dieser ungünstigen Fälle eintritt, oder die Unwahrscheinlichkeit, daß ein günstiger sich ereignet, ist $= \frac{n-k}{n}$, welches auch jederzeit ein echter Bruch ist.

Es ist aber:

$$\frac{k}{n} + \frac{n-k}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

folglich ist immer Wahrscheinlichkeit und Unwahrscheinlichkeit der Einheit gleich.

Je größer k, oder je kleiner n wird, desto größer wird der Bruch $\frac{k}{n}$ oder die Wahrscheinlichkeit. Da aber k, wenn es zunimmt, höchstens = n oder n, wenn es abnimmt, höchstens = k werden kann, und alsdann alle Fälle günstig sind, so folgt, daß die Wahrscheinlichkeit, welche = 1 ist, in Gewißheit übergehe, in welchem Falle die Unwahrscheinlichkeit = 0 ist.

Je größer n, oder je kleiner k ist, desto kleiner wird der Bruch $\frac{k}{n}$ oder die Wahrscheinlichkeit. Es kann aber k nicht kleiner als 0 werden, während n jede Größe erreichen kann. Im ersten Falle ist die Wahrscheinlichkeit = 0, die Unwahrscheinlichkeit also = 1, im andern nähert sich die Wahrscheinlichkeit dem Zustande 0, also die Unwahrscheinlichkeit der Einheit immer mehr, obgleich weder die eine, noch die andere ihre Grenze je erreicht. Für k = 0 gehet also die Unwahrscheinlichkeit in Gewißheit über; ist aber n sehr groß gegen k, so ist immer noch Wahrscheinlichkeit vorhanden, obgleich sie sehr gering ist, und so klein gemacht werden kann, als man will.

Wahrscheinlichkeit und Unwahrscheinlichkeit sind also immer zwischen 0 und 1 enthalten.

Vergleicht man die Wahrscheinlichkeit mit der Unwahrscheinlichkeit, oder $\frac{n}{k}$ mit $\frac{n-k}{n}$, so entsteht der Exponent $\frac{k}{n-k}$, d. h. das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit ist das der Anzahl der günstigen Fälle zu der der ungünstigen.

Die Methode, bei gewissen Gelegenheiten, bei welchen sich mehrere Fälle ereignen können, die Größe der Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß sich ein gewisser oder mehrere gewisse dieser Fälle vor andern ereignen, heißt Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§. 52.

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten bei Spielen.

Aus dem Vorhergehenden ist nun klar, was man unter Wahrscheinlichkeit bei Spielen zu verstehen habe. Alle Spiele, bei denen nur der Zufall herscht, heißen Hazardspiele. Man setzt auf einen gewissen Fall, von dem man hofft, daß er eintreffen werde, einen gewissen Preis, und erhält einen Gewinn, wenn diese Hoffnung erfüllt wird. Dieser Gewinn muß sich aber nach der Wahrscheinlichkeit, daß dieser Fall eintreten wird, und nach dem Einsatze richten, und zwar muß sich der Billigkeit gemäß der Einsatz zu dem Gewinne verhalten, wie die Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit, oder wie k zu n-k, denn der Spieler hat k, der, welcher den Gewinn bezahlen soll, n-k Fälle für sich. Ist daher $\frac{k}{n}$ die Wahrscheinlichkeit, also $\frac{n-k}{n}$ die Unwahrscheinlichkeit, A der Einsatz und B der Gewinn, so muß:

$$\frac{A}{B} = \frac{k}{n-k}$$

seyn.

Wir wollen dieses zuerst auf das Würfelspiel anwenden.

Um zuerst zu erforschen, wie viel verschiedene Würfe allgemein mit n Wür-

seln möglich sind, so ist klar, daß zu jedem Wurfe jeder Würfel eine seiner 6 Seiten darbietet, daß also alle möglichen Würfe nichts anders, als der Inbegriff aller Variationsformen sind, die sich aus n Reihen, wovon jede 6 Elemente enthält, erzeugen lassen, und daß endlich die Anzahl aller möglichen Würfe

$$= S\overset{n}{V}[1..6] = 6^n$$

ist. (§. 50.)

Wollte man alle diese Würfe würklich darstellen, so müßte man die Variationsformen bilden, die aus den Elementen 1, 2 .. 6 zur Klasse n möglich sind, allein da alle diese n Reihen in Hinsicht auf ihre Elemente identisch sind, so verwandelt sich $\overset{n}{V}[1..6]$ in $_p\overset{n}{C}[1..6]$ (§. 36.) und man hat daher nur nöthig, alle Combinationsformen aus 6 Elementen zur Klasse n zu erzeugen, und jede so vielmal zu nehmen, als sich ihre Elemente versetzen lassen.

Sollen nun z. B. von den 6^n möglichen Würfen diejenigen als die günstigen angesehen werden, welche gleiche Augen haben, also entweder n Einsen, n Zweien, u. s. w. so sind der günstigen Fälle 6, während also der ungünstigen $6^n - 6$ sind, die Wahrscheinlichkeit ist also $= \frac{6}{6^n} = \frac{1}{6^{n-1}}$, die Unwahrscheinlichkeit $= \frac{6^n - 6}{6^n}$ $= \frac{6^{n-1} - 1}{6^{n-1}}$ und das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit $= \frac{1}{6^{n-1} - 1}$.

Wettet z. B. jemand, daß er mit zwei Würfeln zwei gleiche Augen werfen werde, und setzt darauf den Einsatz von 4 Rthl., so muß sich dieser zu dem Gewinne verhalten wie 1 zu 5, da hier n = 2 ist. Bedeutet also x den Gewinn, so ist:

$$\frac{4\ \text{Rthl.}}{x} = \frac{1}{5} \text{ also } x = 20\ \text{Rthl.}$$

Spielt man mit 3 Würfeln, und behält obigen Einsatz bei, so ist das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit $= \frac{1}{6^2 - 1} = \frac{1}{35}$, und daher, wenn x der Gewinn ist,

$\frac{4\,ℳ}{x} = \frac{1}{35}$ also $x = 35 \cdot 4\,ℳ = 5$ ℛ 20 ℳ.

Bediente man sich 6 Würfel, so ist bei demselben Einsatze

$\frac{4\,ℳ}{x} = \frac{1}{6^5-1}$ also $x = 7775 \cdot 4\,ℳ = 1295$ ℛ 20 ℳ.

Soll nur in dem Falle gewonnen werden, wenn von den 6 Würfen, die gleiche Augen haben, ein gewisser eintritt, so ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{6^n}$, und also das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit $= \frac{1}{6^n - 1}$. Spielt man daher mit 4 Würfeln, und ist der Einsatz = 4 ℳ, so ist:

$$\frac{4\,ℳ}{x} = \frac{1}{6^4-1} = \frac{1}{1295}$$

folglich ist der Gewinn

$$x = 1295 \cdot 4\,ℳ = 215 \text{ ℛ } 20\,ℳ$$

und dergleichen.

Da alle auf diese Art entstehenden Würfe nichts anders, als Combinationsformen bei gestatteter Wiederholbarkeit sind, die sich aus den Elementen bilden lassen, so, daß jede so oft vorkömmt, wie sich ihre Elemente versetzen lassen, so folgt, daß ein jeder einzelner Wurf so oft vorkommen kann, als die Augen, welche ihn bilden, permutirt werden können. Wird daher ein gewisser Wurf vorgeschrieben und verlangt man die Wahrscheinlichkeit, daß er eintreffe, zu bestimmen, so vergleiche man die Permutationszahl p mit 6^n, will man das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit wissen, so vergleiche man p mit $6^n - p$.

Z. B. Die Wahrscheinlichkeit, daß man mit 4 Würfeln den Wurf 1356 werfe, ist $\frac{24}{6^4} = \frac{24}{1296} = \frac{1}{54}$ und das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit ist $\frac{24}{6^4-24} = \frac{1}{53}$, denn die Anzahl der günstigen Würfe ist $= 1.2.3.4 = 24$. Soll mit 4 Würfeln der Wurf 1223 entstehen, so sind der günstigen Fälle $= \frac{1.2.3.4}{1.2} = 12$, die Wahrscheinlichkeit $= \frac{12}{6^4} = \frac{1}{108}$ und das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit $= \frac{1}{107}$. Soll also auf

diesen Wurf der Einsatz von 4 ℳ gesetzt werden, und ist x der Gewinn, so ist:

$$\frac{4\ ℳ}{x} = \frac{1}{107} \text{ also } x = 107.\ 4\ ℳ = 17\ ℛ\ 20\ ℳ$$

u. s. w.

Je größer daher die Permutationszahl ist, desto größer wird die Wahrscheinlichkeit bei derselben Anzahl von Würfeln, und sie ist daher am größesten, wenn alle Augen verschieden von einander sind, bei welcher Voraussetzung freilich nur 6 Würfel angenommen werden können. Alsdann ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1.2.3..6}{6^6}$ $= \frac{720}{46656} = \frac{5}{324}$ und das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit $= \frac{720}{46656 - 720} = \frac{720}{45936} = \frac{5}{319}$

Soll daher der Preis von 4 ℳ gesetzt werden, so ist, wenn x den Gewinn bedeutet:

$$\frac{4\ ℳ}{x} = \frac{5}{319} \text{ also } x = \frac{319}{5}.\quad 4\ ℳ = 10\ ℛ\ 15\ ℳ\ 2\tfrac{2}{5}\ ₰.$$

Wenn es mehrere Gelegenheiten giebt, wobei verschiedene Fälle hervorgehen, und es befinden sich bei jeder Gelegenheit günstige und ungünstige Fälle, so läßt sich die Wahrscheinlichkeit, daß jede Gelegenheit zu gleicher Zeit einen günstigen Fall hervorbringt, leicht berechnen. Bei der ersten Gelegenheit mögen a Fälle, bei der zweiten b, allgemein bei der nten n Fälle überhaupt möglich seyn. Bei jeder Gelegenheit gehet zur Zeit ein Fall hervor, jede bietet jedesmal einen Fall dar, und dieses kann also auf so viele verschiedene Arten geschehen, als sich Variationsformen aus den n Reihen von Elementen, deren Anzahl jedoch nicht in jeder Reihe gleich ist, bilden lassen. Die Zahl aller dieser Formen ist aber $= a.b.c...n$ (§. 50.) und daher sind überhaupt $a.b.c...n$ Fälle möglich. Unter a mögen nun α, unter b, β, und allgemein unter n, ν günstige Fälle seyn. Soll nun ein günstiger Fall im Ganzen hervorgehen, oder soll jede Gelegenheit einen ihrer günstigen Fälle darbieten, so kann dieses wieder auf so viele verschiedene Arten geschehen, als sich Variationsformen aus den n Reihen der günstigen Fälle ableiten lassen, welches aber $\alpha.\beta.\gamma..\nu$ mal geschehen kann.

Wenn daher überhaupt $a.b.c..n$ mögliche, und darunter $\alpha.\beta.\gamma..\nu$ günstige

Fälle vorhanden sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein gewisser hervorgehender Fall ein günstiger ist, $= \frac{\alpha.\beta.\gamma\ldots\nu}{a.b.c\ldots n} = \frac{\alpha}{a}.\frac{\beta}{b}.\frac{\gamma}{c}\ldots\frac{\nu}{n}$

Nun ist aber $\frac{\alpha}{a}$ die Wahrscheinlichkeit, daß die erste Gelegenheit, $\frac{\beta}{b}$, daß die zweite allgemein $\frac{\nu}{n}$ die Wahrscheinlichkeit, daß die nte Gelegenheit für sich einen günstigen Fall hervorbringt, und es folgt hieraus, daß **die Wahrscheinlichkeit, daß bei verschiedenen Gelegenheiten aus jeder ein günstiger Fall zugleich entstehe, aus den Wahrscheinlichkeiten, daß bei jeder Gelegenheit für sich genommen ein günstiger Fall hervorgehe, zusammengesetzt ist.**

Z. E. Wenn 4 Personen zu gleicher Zeit, jede mit drei Würfeln spielen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der erste für sich genommen drei gleiche Augen wirft, $= \frac{1}{36}$, die Wahrscheinlichkeit, daß der zweite für sich genommen die Augen 115 werfe, $= \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$, die Wahrscheinlichkeit ferner, daß der dritte die Würfe 235 wirft, $= \frac{1}{36}$, die Wahrscheinlichkeit endlich, daß der vierte den Wurf 666 trifft, $= \frac{1}{216}$. Daraus folgt aber, daß die Wahrscheinlichkeit, daß alle vier Personen zu gleicher Zeit diese vorgeschriebenen Würfe thun, $=$

$$\frac{1}{36}.\frac{1}{72}.\frac{1}{36}.\frac{1}{216} = \frac{1}{20155392}$$

und das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit ist $= \frac{1}{20155391}$.

Setzt daher z. B. eine jede Person 6 Ggr., so, daß der ganze Einsatz ein Thaler ist, und sucht man den Gewinn x, den man der Billigkeit gemäß erhalten sollte, so ist $\frac{1}{x} = \frac{1}{20155391}$ d. h. man erhält als Gewinn 20155391 Thaler. Wenn sich nun auch die vier Personen in diesem Gewinne theilen, so hat doch eine jede mit 6 Gutegroschen 5 Millionen Thaler gewonnen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß Jemand mit einem Würfel das erstemal 1, das zweitemal 2, u. s. f. das sechstemal 6 wirft, ist $= \frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656}$, denn die Wahrscheinlichkeit eines jeden Falles ist $= \frac{1}{6}$.

Wenn man aus einer gegebenen Anzahl $= n$ von Dingen jedesmal eine gewisse Anzahl $= k$ derselben hervorhebt, und damit fortfährt, bis man auf diese Weise alle möglichen k Dinge herausgezogen hat, oder, welches dasselbe ist, wenn man aus den Elementen 1, 2..n alle Combinationsformen zur Klasse k bei verbo=

tener Wiederholbarkeit bildet; so kann dieses auf $\overset{-k}{p} \cdot {}^{n}\overset{k}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{1.2\dots k}$ (§. 50.) verschiedene Arten geschehen.

Z. B. Man verlangt zu wissen, auf wie viel verschiedene Weisen man aus einem Whistspiele von 52 Karten 13 erhalten kann, so ist die Anzahl dieser Fälle

$$= \frac{52.51.\dots 40}{1.2.3\dots 13} = 635013559600$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß ein gewisser Fall, z. B. der, daß man alle 13 Atout erhält, eintreten werde, ist $= \frac{1}{635013559600}$

Wollte man berechnen, auf wie viel verschiedene Arten die 52 Karten unter die 4 Whistspieler vertheilt werden können, so kömmt es erst auf die Beantwortung der allgemeinen Frage an, auf wie viel verschiedene Arten man allgemein m Dinge in k Theile theilen könne, so, daß der erste $\overset{1}{n}$, der zweite $\overset{2}{n}$, allgemein der rte $\overset{r}{n}$, und der kte also $\overset{k}{n} = m - (\overset{1}{n} + \overset{2}{n} \dots + \overset{r}{n} \dots + \overset{k-1}{n})$ Dinge enthält.

Nimmt man zuerst aus den m Dingen den ersten Theil, welcher $\overset{1}{n}$ derselben enthält, so kann dieses auf $\frac{m(m-1)\dots(m-(\overset{1}{n}-1))}{1.2\dots\overset{1}{n}}$ verschiedene Arten geschehen. (§. 50.)

Greift man ferner in die noch übrigen $m-\overset{1}{n}$ Dinge ein, um jedesmal $\overset{2}{n}$ heraus zu nehmen, so kann dieses auf

$$\frac{(m-\overset{1}{n}).(m-\overset{1}{n}-1)\dots((m-\overset{1}{n})-(\overset{2}{n}-1))}{1.2\dots\overset{r}{n}}$$

verschiedene Arten geschehen u. s. w. Sind allgemein $(\overset{1}{n} + \overset{2}{n} \dots \overset{r-1}{n})$ Dinge von m weggenommen, und soll man aus den übrigen $m-(\overset{1}{n} + \overset{2}{n} \dots + \overset{r-1}{n})$ auf alle mögliche Arten $\overset{r}{n}$ Dinge herausnehmen, so kann dieses auf

$$\frac{(m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}\dots\overset{r-1}{n})).(m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}\dots\overset{r-1}{n})-1)\dots(m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}\dots+\overset{r-1}{n})-(\overset{r}{n}-1))}{1.2.\dots\overset{r}{n}}$$

verschiedene Arten geschehen. Ist endlich $r=k$, d. h. soll man aus $m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}\ldots\overset{k-1}{n}) = \overset{k}{n}$ Dingen jedesmal $\overset{k}{n}$ herausnehmen, so kann dieses natürlich nur einmal geschehen, wie auch die Formel zeigt, wenn man darin für r den Werth k setzt.

Um also irgend eine Eintheilung dieser Art zu machen, wird man jedesmal eine aus den $\frac{m(m-1)\ldots(m-(\overset{1}{n}-1))}{1.2\ldots\overset{1}{n}}$ Complexionen, ferner eine aus den $\frac{(m-\overset{1}{n})\ldots(m-\overset{1}{n}-(\overset{2}{n}-1))}{1.2\ldots\overset{2}{n}}$, allgemein eine aus den

$$\frac{[m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}\ldots\overset{r-1}{n})]\ldots[m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}\ldots\overset{r-1}{n})-(\overset{r}{n}-1)]}{1.2\ldots\overset{r}{n}}$$

Complexionen nehmen, und um alle diese Eintheilungen vorzunehmen, wird man diesen Act auf alle mögliche Weise durchführen, oder jene Inbegriffe von Complexionen als Elementenreihen ansehen und daraus Variationsformen bilden. Um die Anzahl aller Variationsformen zu erhalten, wird man die Zahlen mit einander multipliciren, welche die Anzahl der Elemente dieser Reihen darstellen, so, daß daher die Menge der möglichen Eintheilungen

$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-(\overset{1}{n}-1))}{1.2\ldots\overset{1}{n}}\cdots\frac{(m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}\ldots+\overset{r-1}{n}))\ldots(m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}\ldots\overset{r-1}{n})-(\overset{r}{n}-1))}{1.2\ldots\overset{r}{n}}\cdots$$

$$\frac{(m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}\ldots\overset{k-2}{n})\ldots(m-(\overset{1}{2}+\overset{2}{n}\ldots\overset{k-2}{n})-(\overset{k-1}{n}-1)}{1,2\ldots\overset{k-1}{n}}$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-(\overset{1}{n}-1))\,(m-\overset{1}{n})\ldots(m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}\ldots(\overset{r-1}{n}-1)))\,(m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}\ldots\overset{r-1}{n}))\ldots(m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}\ldots\overset{k-1}{n})-1)}{(1.2\ldots\overset{1}{n})(1.2\ldots\overset{2}{n})\ldots(1.2\ldots\overset{r}{n})\ldots(1.2\ldots\overset{k-1}{n})}$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-q)\ldots(\overset{k}{n}-1)}{(1.2\ldots\overset{1}{n})\ldots(1.2\ldots\overset{r}{n})\ldots(1.2\ldots\overset{k-1}{n})}$$

ist.

Sind alle Theile gleich, oder ist $\overset{1}{n}=\overset{2}{n}=\overset{3}{n}\ldots=\overset{k}{n}$, welches wir der Kürze wegen mit n bezeichnen wollen, so ist die Anzahl aller möglichen Arten, wie die Eintheilung geschehen kann

$$= \frac{m.(m-1)(m-2)\ldots(m-q)\ldots(n-1)}{(1.2.3\ldots n)^{k-1}}$$

Will man nun also z. B. wissen, auf wie viel verschiedene Arten man die 52 Karten unter vier Whistspieler vertheilen kann, so setze man nur statt m den Werth 52, statt k den Werth 4 und statt n den Werth 13 in die Formel, woraus sie

$$\frac{52.\,51.\,50\ldots16.\,15.\,14}{(1.\,2.\,3\ldots12.\,13)^3}$$

und die gesuchte Zahl ist daher:

8565126197851151767861430000

Nimmt man also einen dieser Fälle hervor, so kömmt es noch darauf an, wie oft diese 4 mal 13 Karten, wovon jede 13 nun nicht weiter getrennt werden dürfen, unter den 4 Spielern verschieden vertheilt werden können, oder wie viel mal diese 4 Haufen von Karten ihre Stellen wechseln können, welches bekanntlich $1.2.3.4 = 24$ mal geschehen kann. Aus jedem der oben berechneten Fälle werden daher noch 24 neue, und es giebt daher

205563028748427643148674560000

wirklich verschiedene Whistspiele. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich beim Kartengeben ein gewisses Spiel wieder ereigne, ist also =

$$\frac{1}{205563028748427643148674560000}.$$

Auf ähnliche Weise kann man die Anzahl aller möglichen Lhombrespiele berechnen, die Wahrscheinlichkeit, daß man die Spadille oder Baste oder beide zugleich beim Kartengeben bekommt und dergl.

Der Zweck des Vorhergehenden ist, zu zeigen, wie man in Fällen dieser Art Wahrscheinlichkeiten berechnen könne. Es ist leicht, diese Begriffe auf Wahrscheinlichkeit beim Lotto, bei den Klassen-Lotterien und dergleichen anzuwenden, ja, diese Anwendung erstreckt sich auf geometrische Untersuchungen, auf Betrachtung und Berechnung der Fehler, welche bei Beobachtungen aller Art wegen der Unvollkommenheit der Instrumente nicht zu umgehen sind, und auf viel andere Gegenstände. Für den Zweck dieses Anhanges zur reinen Combinationslehre ist eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes, welcher, vollständig abgehandelt, einen bedeutenden Umfang erhalten müßte, nicht geeignet.

Dritter Abschnitt.

Multiplication zusammengesetzter Formen.

---

§. 53.

Bildung der Producte aus Factoren von der Form $\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} \ldots$

Wenn man zwei Größen, die aus mehreren Theilen bestehen, mit einander multipliciren soll, so wird gefodert, daß man jeden Theil des einen Factors mit jedem Theile des andern durch Multiplication vereinige. Wird z. B. das Product der beiden Größen $(m + n + p)$ und $(q + r + s)$ verlangt, so heißt dieses, man soll $m + n + p$ sowohl mit q, als mit r und endlich auch mit s multipliciren, und man hat also

$$(m+n+p)(q+r+s) = (m+n+p).q + (m+n+p).r + (m+n+p).s$$

oder welches einerlei ist, das Product ist

$$= mq + hq + pq + mr + nr + pr + ms + ns + ps$$

Dasselbe findet statt, wenn mehrere solcher Factoren vorhanden sind, welche man durch Multiplication verbinden soll. Käme z. B. zu jenen beiden Factoren noch der dritte $(v + w + z)$ hinzu, so würde man jedes Glied des Products der beiden früheren Factoren mit jedem Gliede des neu hinzugekommenen multipliciren, und wenn jenes Product Q genannt wird, so ist:

$$(m+n+p)(q+r+s)(v+w+z) = Qv + Qw + Qz.$$

Es mögen daher mehrere Reihen von Größen, jede der Inbegriff mehrerer durch Addition verbundener Theile, gegeben seyn; es mögen ferner die Glieder der ersten Reihe durch $\overset{1}{a}, \overset{2}{a} \ldots \overset{r}{a}$, die der zweiten durch $\overset{1}{b}, \overset{2}{b} \ldots \overset{r}{b}$, allgemein die der k-1ten durch $\overset{1}{(k-1)}, \overset{2}{(k-1)} \ldots \overset{r}{(k-1)}$ bezeichnet werden, so, daß also die Factoren, welche sich zu dem verlangten Producte vereinigen sollen,

$$\begin{array}{l} \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} \ldots \overset{r}{a} \\ \overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \overset{3}{b} \ldots \overset{r}{b} \\ \overset{1}{c} + \overset{2}{c} + \overset{3}{c} \ldots \overset{r}{c} \\ \vdots \\ \overset{1}{(k-1)} + \overset{2}{(k-1)} + \overset{3}{(k-1)} \ldots \overset{r}{(k-1)} \end{array}$$

sind. Jede Reihe enthält r Glieder, und der Reihen selbst sind k-1 gegeben. Das Product, welches wir fingiren wollen, wird also von r und k-1 abhängig seyn. Nennen wir also dieses Product $= {}^{r}\overset{k-1}{K}$, so müssen wir dasjenige, welches aus der Multiplication von k Reihen entstehet, durch ${}^{r}\overset{k}{K}$ bezeichnen. Käme also zu obigen k-1 Reihen noch eine kte, $\overset{1}{k} + \overset{2}{k} \ldots \overset{r}{k}$, hinzu, und wollte man nun das Product aus diesen k Reihen berechnen, so müßte man der Definition des Multiplicirens gemäß das Product der k-1 Reihen mit jedem Gliede der kten Reihe multipliciren, und man hat daher

$${}^{r}\overset{k}{K} = \overset{1}{k}.\,{}^{r}\overset{k-1}{K} + \overset{2}{k}.\,{}^{r}\overset{k-1}{K} + \overset{3}{k}.\,{}^{r}\overset{k-1}{K} \ldots + \overset{r}{k}.\,{}^{r}\overset{k-1}{K}$$

eine recurrirende Regel, welche lehrt, wie man aus dem nächstvorhergehenden Producte das folgende ableiten könne, und welche nichts weiter ist, als das gewöhnliche Multiplicationsverfahren in einer analytischen Formel dargestellt. Zu dem recurrirenden Verfahren bei der Bildung der Producte führte also die Definition der Operation unmittelbar, das independente Verfahren, oder die Art und Weise, wie ${}^{r}\overset{k}{K}$ aus den

Größen, aus welchen es entstehet, gebildet ist; d. h. das Gesetz, nach welchem sich diese Größen zu dem Producte vereinigen, abzuleiten, bleibt uns noch übrig.

Wir haben aber in der reinen Combinationslehre (§. 35.) gesehen, daß unter den Variationsformen, die sich aus den Elementenreihen:

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{a},\ \overset{3}{a} \ldots \overset{r}{a}$$

$$\overset{1}{b},\ \overset{2}{b},\ \overset{3}{b} \ldots \overset{r}{b}$$

$$\vdots$$

$$\overset{1}{k},\ \overset{2}{k},\ \overset{3}{k} \ldots \overset{r}{k}$$

bilden lassen, die Recursion:

$$\overset{k}{V}[1..r] = \overset{1}{k}.\overset{k-1}{V}[1..r] + \overset{2}{k}.\overset{k-1}{V}[1..r] + \overset{3}{k}.\overset{k-1}{V}[1..r] \ldots \overset{r}{k}.\overset{k-1}{V}[1..r]$$

statt finde, wo die Elemente $1..r$ gemeinschaftlicher Inder aller Reihen sind. Diese recurrirende Beziehung ist aber mit der oben gefundenen identisch und man ist daher berechtigt zu schließen, daß die Producte aus Reihen von obiger Form sich aus den Gliedern derselben auf eben die Art erzeugen, wie sich Variationsformen aus denselben bilden, wenn man die einzelnen Glieder als Elemente betrachtet. In der Recursionsformel für ${}^{r}\overset{k}{K}$ bedeutet aber das Nebeneinanderstehen der Größen ${}^{r}\overset{k-1}{K}$ und $\overset{1}{k}$, oder ${}^{r}\overset{k-1}{K}$ und $\overset{r}{k}$ u. s. w. eine Multiplication, so wie die Verbindung der Zeichen ${}^{r}\overset{k-1}{K}\overset{1}{k}$ und ${}^{r}\overset{k-1}{K}\overset{2}{k}$ u. s. w. eine Addition, und folglich müssen die als Elemente angesehenen Theile der obigen Reihen in einer jeden Variationsform mit einander multiplicirt, die Formen selbst, oder jetzt Producte als Theile addirt werden.

Wir können aber aus der Identität obiger beiden Recursionsformeln nicht geradezu schließen, daß ${}^{r}\overset{k}{K} = \overset{k}{V}[1..r]$ ist, sondern müssen noch zu jeder der beiden Hauptgrößen, k und r, eine Constante addiren, so, daß also allgemein

$${}^{r}\overset{k}{K} = \overset{k+h}{V}[1..(r+g)]$$

daß beide Constanten hier = o seyn müssen, erhellet auf den ersten Anblick, denn jede der Reihen enthält nur r Glieder und die Anzahl der Reihen ist k. Will man aber die Constantenbestimmung nach der Regel durchführen, so bemerke man zuerst, daß für k = 1, also in dem Falle, daß nur eine Reihe vorhanden ist, welche sich mit keiner andern multiplicirt,

$$ {}^{r}\overset{k}{K} = \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} \ldots \overset{r}{a} $$

ist. Man hat also:

$$ \overset{h+1}{V}[1..(r+g)] = \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} \ldots \overset{r}{a} $$

Hier treten also Formen hervor, welche der ersten Klasse angehören, woraus h = o folgt; ferner sind dieser Formen, welche, wenn sie der vollständige Inbegriff aller Variationsformen zur ersten Klasse seyn sollen, mit den Elementen übereinkommen müssen, r vorhanden, woraus auch g = o folgt.

Man hat daher ${}^{r}\overset{k}{K} = \overset{k}{V}[1..r]$, wo sich die Elemente 1..r auf die gleich hohen Glieder der zu multiplicirenden Reihen beziehen.

Die independente Regel der Erzeugung eines Products aus mehreren Reihen lautet so: man sehe die zu multiplicirenden Reihen als Elementenreihen an, bilde daraus nach den independenten Regeln alle Variationsformen, und sehe die Elemente in den Formen als Factoren, die Formen selbst aber als Theile an.

Z. B. Es mögen die drei Reihen:

$$ \begin{array}{c} a + b + c \\ d + e + f \\ g + h + k \end{array} $$

durch Multiplication zu vereinigen seyn. Der gemeinschaftliche Inder ist 123, und der Inbegriff aller Variationsformen daraus ist:

111, 112, 113
121, 122, 123
131, 132, 133
211, 212, 213

221, 222, 223
231, 232, 233
311, 312, 313
321, 322, 323
331, 332, 333.

Realisirt man diese Formen, oder setzt man für jedes Element die Größe, welche es bedeutet, verknüpft dann diese durch Multiplication und siehet alle Formen als Theile an, welche man durch Addition mit einander verknüpft, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
& adg + adh + adk + aeg \\
+ & aeh + aek + afg + afh \\
+ & afk + bdg + bdh + hdk \\
+ & beg + beh + bek + bfg \\
+ & bfh + bfk + cdg + cdh \\
+ & cdk + ceg + ceh + cek \\
+ & cfg + cfh + cfk.
\end{aligned}
$$

Sollten die zu multiplicirenden Reihen nicht alle gleichviel Theile haben, so wird man, wie im obigen Falle, das Product aus $k-1$ solcher Reihen, mit jedem Gliede einer hinzukommenden kten multipliciren, falls man das Product aus allen k Reihen erhalten will. Diese recurrirende Regel ist aber dieselbe als diejenige, welche wir zur Bildung der Variationsformen aus unvollständigen Reihen (§. 38) angewandt haben, und es folgt also, daß man auch in diesem Falle die zu multiplicirenden Reihen als Elementenreihen ansehen müsse, um aus ihnen den Inbegriff aller Variationsformen zu erzeugen, welche, realisirt, das gefoderte Product darstellen.

§. 54.

Producte aus Factoren von der Form $\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots$

Wichtiger ist die Betrachtung der Producte solcher Reihen, welche nach Potenzen einer gewissen Hauptgröße regelmäßig fortschreiten.

Eine solche Reihe ist

$$\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots$$

oder allgemeiner ausgedrückt:

$$\overset{0}{a}x^\alpha + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{a}x^{\alpha+2\delta} \ldots + \overset{r}{a}x^{\alpha+r\delta} \ldots$$

Diese Form begreift die erste in sich, welche aus ihr entstehet, wenn man für α den Werth 0 setzt, und $\delta = 1$ annimmt.

Sind also solcher Formen mehrere gegeben, und wird gefodert, sie durch Multiplication zu vereinigen, so wird man ihnen einen gemeinschaftlichen Index geben, daraus alle Variationsformen bilden und diese realisiren. Diesen gemeinschaftlichen Index könnte man beliebig wählen, etwa von 1 an u. s. w.; allein es entspringt daraus ein wesentlicher Vortheil, wenn man ihn so annimmt, daß derselbe jedesmal mit dem Vielfachen des δ im Exponenten von x übereinkömmt.

Z. B. man habe die Reihen:

$$\overset{0}{a}x^\alpha + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{a}x^{\alpha+2\delta}$$

$$\overset{0}{b}x^\alpha + \overset{1}{b}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{b}x^{\alpha+2\delta}$$

$$\overset{0}{c}x^\alpha + \overset{1}{c}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{c}x^{\alpha+2\delta}$$

so ist der gemeinschaftliche Index dieser Reihen 0, 1, 2, und das Product ist also =

$$\overset{3}{V}[0..2] = \begin{matrix} 000, & 001, & 002, & 010 \\ 011, & 012, & 020, & 021 \\ 022, & 100 & \text{u. s. w.} & \end{matrix}$$

Diese Formen realisirt, geben folgende Partialproducte: $\overset{000}{abc.}x^{3\alpha} + \overset{001}{abc.}x^{3\alpha+\delta} + \overset{002}{abc}x^{3\alpha+2\delta} + \overset{010}{abc}x^{3\alpha+\delta}$ u. s. w. Es kann daher keine Schwierigkeiten haben, sämtliche Partialproducte zu erhalten; allein man siehet schon aus diesem Beispiele, daß man nach der Realisation der Formen noch alle diejenigen Partialproducte vereinigen müsse, welche eine gleiche Potenz von x in sich schließen.

Jedes Partialproduct enthält k Factoren, wenn der gegebenen Reihen k sind; jeder Factor enthält ein x mit einem Exponenten, dessen erster Theil α, dessen zweiter

aber irgend ein Vielfaches von δ ist. Diese Exponenten werden, wenn man die k Factoren mit einander multiplicirt, zusammen addirt, woraus wieder ein Exponent wird, dessen erster Theil jedesmal $k\alpha$, dessen anderer aber irgend ein Vielfaches von δ seyn wird. Dieses Vielfache von δ wird die Summe der Vielfachen von δ seyn, welche die Factoren im Exponenten besaßen. Um also alle diejenigen Variationsformen, welche, realisirt, eine gleiche Potenz der Hauptgröße darstellen, zusammenstellen, wird man alle diejenigen zusammennehmen müssen, deren Elemente, wenn man ihre Rangzahlen zusammenaddirt, dieselbe Summe geben, denn diese Rangzahlen kommen der Annahme gemäß mit den Vielfachen von δ im Exponenten überein. Eine gewisse Form aus $\overset{k}{V}[o..]$, welche der Summe r angehört, wird, realisirt, ein x auf der Potenz $k\alpha + r\delta$ geben, und alle Variationsformen aus $\overset{k}{V}[o..]$, welche der Summe r angehören, oder ${}^{r}\overset{k}{V}[o..]$ werden realisirt den vollständigen Inbegriff aller der Glieder des Products darbieten, welche $x^{k\alpha + r\delta}$ enthalten, denn jede Variationsform, welche eine andere Summe anzeigt, schließt auch, realisirt, eine andere Potenz von x in sich.

Verlangt man daher von einem solchen Producte dasjenige Glied, welches $x^{k\alpha + r\delta}$ enthält, so ist es $= {}^{r}\overset{k}{V}[o..]$, wobei sich die Elemente o, 1.. auf die Elementenreihen $\overset{0}{a}x^{\alpha}$, $\overset{1}{a}x^{\alpha+\delta}$ ..., $\overset{0}{b}x^{\alpha}$, $\overset{1}{b}x^{\alpha+\delta}$ u. s. w. beziehen. Sondert man von ${}^{n}\overset{k}{V}[o..]$ den gemeinschaftlichen Factor $x^{k\alpha + r\delta}$ ab, so bleiben dieselben Variationsformen übrig, wobei sich jedoch der gemeinschaftliche Index o, 1.. auf die Coefficienten der Glieder der zu multiplicirenden Reihen beziehet. Nun enthält aber $\overset{k}{V}[o..n]$, welches das Product aus k Reihen darstellt, wovon jede n Glieder in sich begreift, alle Variationsformen zur Summe o, 1, 2 u. s. w. bis kn, (§. 39.) und daher wird das Product der k Reihen:

tener Wiederholbarkeit bildet; so kann dieses auf $\overset{-k}{p}.\,{}^{n}\overset{k}{\mathfrak{Z}}{}^{-1} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{1.2\dots k}$ (§. 50.) verschiedene Arten geschehen.

Z. B. Man verlangt zu wissen, auf wie viel verschiedene Weisen man aus einem Whistspiele von 52 Karten 13 erhalten kann, so ist die Anzahl dieser Fälle

$$= \frac{52.51\dots40}{1.2.3\dots13} = 635013559600$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß **ein** gewisser Fall, z. B. der, daß man alle 13 Atout erhält, eintreten werde, ist $= \frac{1}{635013559600}$

Wollte man berechnen, auf wie viel verschiedene Arten die 52 Karten unter die 4 Whistspieler vertheilt werden können, so kömmt es erst auf die Beantwortung der allgemeinen Frage an, auf wie viel verschiedene Arten man allgemein m Dinge in k Theile theilen könne, so, daß der erste $\overset{1}{n}$, der zweite $\overset{2}{n}$, allgemein der rte $\overset{r}{n}$, und der kte also $\overset{k}{n} = m - (\overset{1}{n} + \overset{2}{n} \dots + \overset{r}{n} \dots + \overset{k-1}{n})$ Dinge enthält.

Nimmt man zuerst aus den m Dingen den ersten Theil, welcher $\overset{1}{n}$ derselben enthält, so kann dieses auf $\frac{m(m-1)\dots(m-(\overset{1}{n}-1))}{1.2\dots\overset{1}{n}}$ verschiedene Arten geschehen. (§. 50.)

Greift man ferner in die noch übrigen $m-\overset{1}{n}$ Dinge ein, um jedesmal $\overset{2}{n}$ heraus zu nehmen, so kann dieses auf

$$\frac{(m-\overset{1}{n}).(m-\overset{1}{n}-1)\dots((m-\overset{1}{n})-(\overset{2}{n}-1))}{1.2\dots\overset{r}{n}}$$

verschiedene Arten geschehen u. s. w. Sind allgemein $(\overset{1}{n} + \overset{2}{n} \dots \overset{r-1}{n})$ Dinge von m weggenommen, und soll man aus den übrigen $m-(\overset{1}{n} + \overset{2}{n} \dots + \overset{r-1}{n})$ auf alle mögliche Arten $\overset{r}{n}$ Dinge herausnehmen, so kann dieses auf

$$\frac{(m-(\overset{1}{n} + \overset{2}{n} \dots \overset{r-1}{n})).(m-(\overset{1}{n} + \overset{2}{n} \dots \overset{r-1}{n})-1)\dots(m-(\overset{1}{n} + \overset{2}{n} \dots + \overset{r-1}{n})-(\overset{r}{n}-1))}{1.2\dots\overset{r}{n}}$$

verschiedene Arten geschehen. Ist endlich $r=k$, d. h. soll man aus $m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}\ldots\overset{k-1}{n})=\overset{k}{n}$ Dingen jedesmal $\overset{k}{n}$ herausnehmen, so kann dieses natürlich nur einmal geschehen, wie auch die Formel zeigt, wenn man darin für r den Werth k setzt.

Um also irgend eine Eintheilung dieser Art zu machen, wird man jedesmal eine aus den $\frac{m(m-1)\ldots(m-(\overset{1}{n}-1))}{1.2..\overset{1}{n}}$ Complexionen, ferner eine aus den

$\frac{(m-\overset{1}{n})\ldots(m-\overset{1}{n}-(\overset{2}{n}-1))}{1.2..\overset{2}{n}}$, allgemein eine aus den

$$\frac{[m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}\ldots\overset{r-1}{n})]\ldots[m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}..\overset{r-1}{n})-(\overset{r}{n}-1)]}{1.2.\ldots\overset{r}{n}}$$

Complexionen nehmen, und um alle diese Eintheilungen vorzunehmen, wird man diesen Act auf alle mögliche Weise durchführen, oder jene Inbegriffe von Complexionen als Elementenreihen ansehen und daraus Variationsformen bilden. Um die Anzahl aller Variationsformen zu erhalten, wird man die Zahlen mit einander multipliciren, welche die Anzahl der Elemente dieser Reihen darstellen, so, daß daher die Menge der möglichen Eintheilungen

$$=\frac{m(m-1)..(m-(\overset{1}{n}-1))}{1.2..\overset{1}{n}}\ldots\frac{(m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}..+\overset{r-1}{n}))..(m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}..\overset{r-1}{n})-(\overset{r}{n}-1))}{1.2..\overset{r}{n}}\ldots$$

$$\frac{(m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}..\overset{k-2}{n})..(m-(\overset{1}{2}+\overset{2}{n}..\overset{k-2}{n})-(\overset{k-1}{n}-1)}{1.2..\overset{k-1}{n}}$$

$$=\frac{m(m-1)\ldots(m-(\overset{1}{n}-1))\,(m-\overset{1}{n})\ldots(m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}..(\overset{r-1}{n}-1)))\,(m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}..\overset{r-1}{n}))..(m-(\overset{1}{n}+\overset{2}{n}..\overset{k-1}{n})-1)}{(1.2..\overset{1}{n})(1.2..\overset{2}{n})\ldots(1.2..\overset{r}{n})\ldots(1.2..\overset{k-1}{n})}$$

$$=\frac{m(m-1)\ldots(m-q)..(\overset{k}{n}-1)}{(1.2..\overset{1}{n})\ldots(1.2..\overset{r}{n})\ldots(1.2..\overset{k-1}{n})}$$

ist.

Sind alle Theile gleich, oder ist $\overset{1}{n}=\overset{2}{n}=\overset{3}{n}\ldots=\overset{k}{n}$, welches wir der Kürze wegen mit n bezeichnen wollen, so ist die Anzahl aller möglichen Arten, wie die Eintheilung geschehen kann

$$= \frac{m.(m-1)(m-2) \ldots (m-q) \ldots (n-1)}{(1.2.3 \ldots n)^{k-1}}$$

Will man nun also z. B. wissen, auf wie viel verschiedene Arten man die 52 Karten unter vier Whistspieler vertheilen kann, so setze man nur statt m den Werth 52, statt k den Werth 4 und statt n den Werth 13 in die Formel, woraus sie

$$\frac{52.51.50 \ldots 16.15.14}{(1.2.3 \ldots 12.13)^3}$$

und die gesuchte Zahl ist daher:

$$8565126197851151767861430000$$

Nimmt man also einen dieser Fälle hervor, so kömmt es noch darauf an, wie oft diese 4 mal 13 Karten, wovon jede 13 nun nicht weiter getrennt werden dürfen, unter den 4 Spielern verschieden vertheilt werden können, oder wie viel mal diese 4 Haufen von Karten ihre Stellen wechseln können, welches bekanntlich $1.2.3.4 = 24$ mal geschehen kann. Aus jedem der oben berechneten Fälle werden daher noch 24 neue, und es giebt daher

$$205563028748427643148674560000$$

wirklich verschiedene Whistspiele. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich beim Kartengeben ein gewisses Spiel wieder ereigne, ist also =

$$\frac{1}{205563028748427643148674560000}$$

Auf ähnliche Weise kann man die Anzahl aller möglichen Lhombrespiele berechnen, die Wahrscheinlichkeit, daß man die Spadille oder Baste oder beide zugleich beim Kartengeben bekommt und dergl.

Der Zweck des Vorhergehenden ist, zu zeigen, wie man in Fällen dieser Art Wahrscheinlichkeiten berechnen könne. Es ist leicht, diese Begriffe auf Wahrscheinlichkeit beim Lotto, bei den Klassen-Lotterien und dergleichen anzuwenden, ja, diese Anwendung erstreckt sich auf geometrische Untersuchungen, auf Betrachtung und Berechnung der Fehler, welche bei Beobachtungen aller Art wegen der Unvollkommenheit der Instrumente nicht zu umgehen sind, und auf viel andere Gegenstände. Für den Zweck dieses Anhanges zur reinen Combinationslehre ist eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes, welcher, vollständig abgehandelt, einen bedeutenden Umfang erhalten müßte, nicht geeignet.

Dritter Abschnitt.

Multiplication zusammengesetzter Formen.

---

§. 53.

Bildung der Producte aus Factoren von der Form $\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} \ldots$

Wenn man zwei Größen, die aus mehreren Theilen bestehen, mit einander multipliciren soll, so wird gefobert, daß man jeden Theil des einen Factors mit jedem Theile des andern durch Multiplication vereinige. Wird z. B. das Product der beiden Größen $(m + n + p)$ und $(q + r + s)$ verlangt, so heißt dieses, man soll $m + n + p$ sowohl mit q, als mit r und endlich auch mit s multipliciren, und man hat also

$$(m+n+p)(q+r+s) = (m+n+p).q + (m+n+p).r + (m+n+p).s$$

oder welches einerlei ist, das Product ist

$$= mq + hq + pq + mr + nr + pr + ms + ns + ps$$

Dasselbe findet statt, wenn mehrere solcher Factoren vorhanden sind, welche man durch Multiplication verbinden soll. Käme z. B. zu jenen beiden Factoren noch der dritte $(v + w + z)$ hinzu, so würde man jedes Glied des Products der beiden früheren Factoren mit jedem Gliede des neu hinzugekommenen multipliciren, und wenn jenes Product Q genannt wird, so ist:

$$(m+n+p)(q+r+s)(v+w+z) = Qv + Qw + Qz.$$

Es mögen daher mehrere Reihen von Größen, jede der Inbegriff mehrerer durch Addition verbundener Theile, gegeben seyn; es mögen ferner die Glieder der ersten Reihe durch $\overset{1}{a}, \overset{2}{a} \ldots \overset{r}{a}$, die der zweiten durch $\overset{1}{b}, \overset{2}{b} \ldots \overset{r}{b}$, allgemein die der k-1ten durch $(\overset{1}{k-1}), (\overset{2}{k-1}) \ldots (\overset{r}{k-1})$ bezeichnet werden, so, daß also die Factoren, welche sich zu dem verlangten Producte vereinigen sollen,

$$\begin{array}{l} \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} \ldots \overset{r}{a} \\ \overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \overset{3}{b} \ldots \overset{r}{b} \\ \overset{1}{c} + \overset{2}{c} + \overset{3}{c} \ldots \overset{r}{c} \\ \vdots \\ (\overset{1}{k-1}) + (\overset{2}{k-1}) + (\overset{3}{k-1}) \ldots (\overset{r}{k-1}) \end{array}$$

sind. Jede Reihe enthält r Glieder, und der Reihen selbst sind k-1 gegeben. Das Product, welches wir fingiren wollen, wird also von r und k-1 abhängig seyn. Nennen wir also dieses Product $= {}^{r}\overset{k-1}{K}$, so müssen wir dasjenige, welches aus der Multiplication von k Reihen entstehet, durch ${}^{r}\overset{k}{K}$ bezeichnen. Käme also zu obigen k-1 Reihen noch eine kte, $\overset{1}{k} + \overset{2}{k} \ldots \overset{r}{k}$, hinzu, und wollte man nun das Product aus diesen k Reihen berechnen, so müßte man der Definition des Multiplicirens gemäß das Product der k-1 Reihen mit jedem Gliede der kten Reihe multipliciren, und man hat daher

$${}^{r}\overset{k}{K} = \overset{1}{k}.\,{}^{r}\overset{k-1}{K} + \overset{2}{k}.\,{}^{r}\overset{k-1}{K} + \overset{3}{k}.\,{}^{r}\overset{k-1}{K} \ldots + \overset{r}{k}.\,{}^{r}\overset{k-1}{K}$$

eine recurrirende Regel, welche lehrt, wie man aus dem nächstvorhergehenden Producte das folgende ableiten könne, und welche nichts weiter ist, als das gewöhnliche Multiplicationsverfahren in einer analytischen Formel dargestellt. Zu dem recurrirenden Verfahren bei der Bildung der Producte führte also die Definition der Operation unmittelbar, das independente Verfahren, oder die Art und Weise, wie ${}^{r}\overset{k}{K}$ aus den

$$(x+\overset{1}{a}).(x+\overset{2}{a})..(x+\overset{k}{a}) = x^k + {}^k\overset{1}{A}x^{k-1} + {}^k\overset{2}{A}x^{k-2} \dots + {}^k\overset{h}{A}x^{k-h} \dots + {}^k\overset{k}{A}x^0$$

Kömmt noch ein folgender Factor $(x + \overset{k+1}{a})$ hinzu, so ist:

$$(x+\overset{1}{a}).(x+\overset{2}{a})..(x+\overset{k+1}{a}) = x^{k+1} + {}^k\overset{1}{A}x^k \dots + {}^k\overset{h}{A}x^{k-h+1} \dots + {}^k\overset{k}{A}x^1$$
$$+ \overset{k+1}{a}x^k \dots + \overset{k+1}{a}\,{}^k\overset{h-1}{A}x^{k-h+1} .. + \overset{k+1}{a}\,{}^k\overset{k-1}{A}x^1 + \overset{k+1}{a}\,{}^k\overset{k}{A}x^0.$$

Der Coefficient des hten Gliedes dieses Products, welchen wir nun durch ${}^{k+1}\overset{h}{A}$ anzudeuten durch obige Annahme gezwungen sind, ist also:

$${}^{k+1}\overset{h}{A} = {}^k\overset{h}{A} + \overset{k+1}{a}\,{}^k\overset{h-1}{A}$$

Aber auf eben diese Art recurriren auch die Combinationsklassen bei verbotener Wiederholbarkeit, denn es ist:

$$\overset{h}{C'}[1..(k+1)] = \overset{h}{C'}[1..k] + \overset{h-1}{C'}[1..k].\overset{(k+1)}{a}$$

so, daß sich die in den Klammern stehenden Elemente auf $\overset{1}{a}, \overset{2}{a} .. \overset{r+1}{a}$ beziehen. Man hat daher:

$${}^{k+1}\overset{h}{A} = \overset{k+g}{C'}[1..(k+1+n)]$$

wobei es noch nöthig ist, die fingirten Constanten n und g zu bestimmen.

Das Glied dieses Productes, welches kein x mehr enthält, muß die Größen $\overset{1}{a}, \overset{2}{a} .. \overset{k+1}{a}$ als Factoren in sich schließen, und ist daher $= \overset{k+1}{C'}[1..(k+1)]$. Setzt man daher in obigem Ausdrucke für h den Werth $k+1$, so hat man:

$$\overset{k+1}{C'}[1..(k+1)] = \overset{k+1+g}{C'}[1..(k+1+n)]$$

woraus folgt, daß beide Constanten $= 0$ seyn müssen. Man hat daher:

$${}^{k+1}\overset{h}{A} = \overset{h}{C'}[1..(k+1)]$$

daß beide Constanten hier = o seyn müssen, erhellet auf den ersten Anblick, denn jede der Reihen enthält nur r Glieder und die Anzahl der Reihen ist k. Will man aber die Constantenbestimmung nach der Regel durchführen, so bemerke man zuerst, daß für k = 1, also in dem Falle, daß nur eine Reihe vorhanden ist, welche sich mit keiner andern multiplicirt,

$$ {}^{r}\overset{k}{K} = \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} \ldots \overset{r}{a} $$

ist. Man hat also:

$$ \overset{h+1}{V}[1..(r+g)] = \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} \ldots \overset{r}{a} $$

Hier treten also Formen hervor, welche der ersten Klasse angehören, woraus h = o folgt; ferner sind dieser Formen, welche, wenn sie der vollständige Inbegriff aller Variationsformen zur ersten Klasse seyn sollen, mit den Elementen übereinkommen müssen, r vorhanden, woraus auch g = o folgt.

Man hat daher ${}^{r}\overset{k}{K} = \overset{k}{V}[1..r]$, wo sich die Elemente 1..r auf die gleich hohen Glieder der zu multiplicirenden Reihen beziehen.

Die independente Regel der Erzeugung eines Products aus mehreren Reihen lautet so: man sehe die zu multiplicirenden Reihen als Elementenreihen an, bilde daraus nach den independenten Regeln alle Variationsformen, und sehe die Elemente in den Formen als Factoren, die Formen selbst aber als Theile an.

Z. B. Es mögen die drei Reihen:

$$ \begin{array}{c} a + b + c \\ d + e + f \\ g + h + k \end{array} $$

durch Multiplication zu vereinigen seyn. Der gemeinschaftliche Index ist 123, und der Inbegriff aller Variationsformen daraus ist:

111, 112, 113
121, 122, 123
131, 132, 133
211, 212, 213

221, 222, 223
231, 232, 233
311, 312, 313
321, 322, 323
331, 332, 333.

Realisirt man diese Formen, oder setzt man für jedes Element die Grösse, welche es bedeutet, verknüpft dann diese durch Multiplication und siehet alle Formen als Theile an, welche man durch Addition mit einander verknüpft, so erhält man:

$$\begin{array}{l} adg + adh + adk + aeg \\ + aeh + aek + afg + afh \\ + afk + bdg + bdh + hdk \\ + beg + beh + bek + bfg \\ + bfh + bfk + cdg + cdh \\ + cdk + ceg + ceh + cek \\ + cfg + cfh + cfk. \end{array}$$

Sollten die zu multiplicirenden Reihen nicht alle gleichviel Theile haben, so wird man, wie im obigen Falle, das Product aus $k-1$ solcher Reihen, mit jedem Gliede einer hinzukommenden kten multipliciren, falls man das Product aus allen k Reihen erhalten will. Diese recurrirende Regel ist aber dieselbe als diejenige, welche wir zur Bildung der Variationsformen aus unvollständigen Reihen (§. 38) angewandt haben, und es folgt also, daß man auch in diesem Falle die zu multiplicirenden Reihen als Elementenreihen ansehen müsse, um aus ihnen den Inbegriff aller Variationsformen zu erzeugen, welche, realisirt, das gefoderte Product darstellen.

§. 54.

Producte aus Factoren von der Form $\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots$

Wichtiger ist die Betrachtung der Producte solcher Reihen, welche nach Potenzen einer gewissen Hauptgröße regelmäßig fortschreiten.

Eine solche Reihe ist

$$\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots$$

oder allgemeiner ausgedrückt:

$$\overset{0}{a}x^\alpha + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{a}x^{\alpha+2\delta} \ldots + \overset{r}{a}x^{\alpha+r\delta} \ldots$$

Diese Form begreift die erste in sich, welche aus ihr entstehet, wenn man für α den Werth 0 setzt, und $\delta = 1$ annimmt.

Sind also solcher Formen mehrere gegeben, und wird gefodert, sie durch Multiplication zu vereinigen, so wird man ihnen einen gemeinschaftlichen Index geben, daraus alle Variationsformen bilden und diese realisiren. Diesen gemeinschaftlichen Index könnte man beliebig wählen, etwa von 1 an u. s. w.; allein es entspringt daraus ein wesentlicher Vortheil, wenn man ihn so annimmt, daß derselbe jedesmal mit dem Vielfachen des δ im Exponenten von x übereinkömmt.

Z. B. man habe die Reihen:

$$\overset{0}{a}x^\alpha + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{a}x^{\alpha+2\delta}$$

$$\overset{0}{b}x^\alpha + \overset{1}{b}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{b}x^{\alpha+2\delta}$$

$$\overset{0}{c}x^\alpha + \overset{1}{c}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{c}x^{\alpha+2\delta}$$

so ist der gemeinschaftliche Index dieser Reihen 0, 1, 2, und das Product ist also =

$$\overset{3}{V}[0..2] = 000,\ 001,\ 002,\ 010$$
$$011,\ 012,\ 020,\ 021$$
$$022,\ 100 \text{ u. s. w.}$$

Diese Formen realisirt, geben folgende Partialproducte: $\overset{000}{abc}.x^{3\alpha} + \overset{001}{abc}.x^{3\alpha+\delta} + \overset{002}{abc}x^{3\alpha+2\delta} + \overset{010}{abc}x^{3\alpha+\delta}$ u. s. w. Es kann daher keine Schwierigkeiten haben, sämtliche Partialproducte zu erhalten; allein man siehet schon aus diesem Beispiele, daß man nach der Realisation der Formen noch alle diejenigen Partialproducte vereinigen müsse, welche eine gleiche Potenz von x in sich schließen.

Jedes Partialproduct enthält k Factoren, wenn der gegebenen Reihen k sind; jeder Factor enthält ein x mit einem Exponenten, dessen erster Theil α, dessen zweiter

aber irgend ein Vielfaches von δ ist. Diese Exponenten werden, wenn man die k Factoren mit einander multiplicirt, zusammen addirt, woraus wieder ein Exponent wird, dessen erster Theil jedesmal $k\alpha$, dessen anderer aber irgend ein Vielfaches von δ seyn wird. Dieses Vielfache von δ wird die Summe der Vielfachen von δ seyn, welche die Factoren im Exponenten besaßen. Um also alle diejenigen Variationsformen, welche, realisirt, eine gleiche Potenz der Hauptgröße darstellen, zusammenstellen, wird man alle diejenigen zusammennehmen müssen, deren Elemente, wenn man ihre Rangzahlen zusammenaddirt, dieselbe Summe geben, denn diese Rangzahlen kommen der Annahme gemäß mit den Vielfachen von δ im Exponenten überein. Eine gewisse Form aus $\overset{k}{V}[0..]$, welche der Summe r angehört, wird, realisirt, ein x auf der Potenz $k\alpha + r\delta$ geben, und alle Variationsformen aus $\overset{k}{V}[0..]$, welche der Summe r angehören, oder $^{r}\overset{k}{V}[0..]$ werden realisirt den vollständigen Inbegriff aller der Glieder des Products darbieten, welche $x^{k\alpha + r\delta}$ enthalten, denn jede Variationsform, welche eine andere Summe anzeigt, schließt auch, realisirt, eine andere Potenz von x in sich.

Verlangt man daher von einem solchen Producte dasjenige Glied, welches $x^{k\alpha + r\delta}$ enthält, so ist es $= {}^{r}\overset{k}{V}[0..]$ wobei sich die Elemente 0, 1.. auf die Elementenreihen $\overset{0}{a}x^{\alpha}$, $\overset{1}{a}x^{\alpha+\delta}$ ..., $\overset{0}{b}x^{\alpha}$, $\overset{1}{b}x^{\alpha+\delta}$ u. s. w. beziehen. Sondert man von $^{n}\overset{k}{V}[0..]$ den gemeinschaftlichen Factor $x^{k\alpha + r\delta}$ ab, so bleiben dieselben Variationsformen übrig, wobei sich jedoch der gemeinschaftliche Index 0, 1.. auf die Coefficienten der Glieder der zu multiplicirenden Reihen beziehet. Nun enthält aber $\overset{k}{V}[0..n]$, welches das Product aus k Reihen darstellt, wovon jede n Glieder in sich begreift, alle Variationsformen zur Summe 0, 1, 2 u. s. w. bis kn, (§. 39.) und daher wird das Product der k Reihen:

$$\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta} \ldots + \overset{n}{a}x^{\alpha+n\delta}$$
$$\overset{0}{b}x^{\alpha} + \overset{1}{b}x^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{h}{b}x^{\alpha+h\delta} \ldots + \overset{n}{b}x^{\alpha+n\alpha}$$
$$\vdots$$
$$\overset{0}{m}x^{\alpha} + \overset{1}{m}x^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{h}{m}x^{\alpha+h\delta} \ldots + \overset{n}{m}x^{\alpha+n\delta}$$

mit $x^{k\alpha}$ anfangen, successiv $x^{k\alpha+\delta}$, $x^{k\alpha+2\delta}$ u. s. w. enthalten und mit $x^{k\alpha+kn\delta}$ schließen; das rte Glied nach dem anfänglichen wird ${}^{r}\overset{k}{V}[0\,..\,n].x^{k\alpha+r\delta}$ und also das Totalproduct:

$${}^{0}\overset{k}{V}[0..n].x^{k\alpha} + {}^{1}\overset{k}{V}[0..n].x^{k\alpha+\delta} \ldots + {}^{r}\overset{k}{V}[0..n].x^{k\alpha+r\delta} \ldots + {}^{kn}\overset{k}{V}[0..n].x^{k\alpha+kn\delta}$$

seyn, wobei sich die Elemente $0..n$ auf die Coefficienten der Glieder der zu multiplicirenden Reihen beziehen.

Diese Auflösung zeigt, wie man ein jedes Glied des gefoderten Products, ohne vorher irgend ein früheres Product berechnet zu haben, d. h. independent darstellen könne.

Für den einfacheren Fall, daß $\alpha = 0$, $\delta = 1$ ist, werden die Reihen:

$$\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^{2} \ldots + \overset{h}{a}x^{h} \ldots + \overset{n}{a}x^{n}$$
$$\overset{0}{b} + \overset{1}{b}x + \overset{2}{b}x^{2} \ldots + \overset{h}{b}x^{h} \ldots + \overset{n}{b}x^{n}$$
$$\vdots$$
$$\overset{0}{m} + \overset{1}{m}x + \overset{2}{m}x^{2} \ldots + \overset{h}{m}x^{h} \ldots + \overset{n}{m}x^{n}$$

und man erhält das Product derselben, wenn man in dem allgemeinern Producte $\alpha = 0$, $\delta = 1$ setzt, also:

$${}^{0}\overset{k}{V}[0..n] + {}^{1}\overset{k}{V}[0..n].x \ldots + {}^{r}\overset{k}{V}[0..n]x^{r} \ldots {}^{kn}\overset{k}{V}[0..n]x^{kn}$$

Für $\alpha = \beta = 1$ hat man die Reihen:

$$\overset{0}{a}x + \overset{1}{a}x^2 \ldots + \overset{h}{a}x^{h+1} \ldots + \overset{n}{a}x^{n+1}$$
$$\overset{0}{b}x + \overset{1}{b}x^2 \ldots + \overset{h}{b}x^{h+1} \ldots + \overset{n}{b}x^{n+1}$$
$$\vdots$$
$$\overset{0}{m}x + \overset{1}{m}x^2 \ldots + \overset{h}{m}x^{n+1} \ldots + \overset{n}{m}x^{n+1}$$

und das Product:

$${}^{0}\overset{k}{V}[0\,..\,n]\,.\,x^k + {}^{1}\overset{k}{V}[0..n].x^{k+1} \ldots + {}^{r}\overset{k}{V}[0..n].x^{k+r} \ldots + {}^{kn}\overset{k}{V}[0..n]\,x^{k+kn}$$

Wollte man hier den Coefficienten in den Reihen solche Indices geben, welche mit der Potenz von x übereinkommen, so rückt ein jedes Element im Range um 1 höher, so, daß also die Variationsformen ganz dieselben bleiben, nur daß ihre Summen um so viel Einheiten größer werden, so viel Elemente sie enthalten, nämlich k. Man findet alsdann den Coefficienten zu x^{k+r} nicht mehr ${}^{r}\overset{k}{V}[0\,..\,n]$, sondern ${}^{k+r}\overset{k}{V}[1..(n+1)]$ und es ist daher das Product der Reihen:

$$\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{h}{a}x^h \,..\, + \overset{n+1}{a}x^{n+1}$$
$$\overset{1}{b}x + \overset{2}{b}x^2 \ldots + \overset{h}{b}x^h \,..\, + \overset{n+1}{b}x^{n+1}$$
$$\vdots$$
$$\overset{1}{m}x + \overset{2}{m}x^2 \ldots + \overset{h}{m}x^h \,..\, + \overset{n+1}{m}x^{n+1}$$

$$= {}^{k}\overset{k}{V}[1..(n+1)]x^k + {}^{k+1}\overset{k}{V}[1..(n+1)]\,x^{k+1} \ldots + {}^{k(n+1)}\overset{k}{V}[1..(n+1)].x^{k(n+1)}$$

Hätte man die Folge der Glieder der zu multiplicirenden Reihen in der umgekehrten Ordnung genommen, so würde natürlich das Product dieselbe Ordnung befolgt haben.

Es mögen nun z. B. die Reihen:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3 & + & 5x & + & 6x^2 & - & 3x^3 \\ -1 & + & x & - & 2x^2 & + & x^3 \\ 4 & - & 3x & - & x^2 & + & 7x^3 \\ 7 & + & 11x & + & 3x^2 & - & 2x^3 \end{array}$$

mit einander zu multipliciren seyn, und man verlangt dasjenige Glied des Products, welches x^3 enthält, so ist dieses $= {}^3\overset{4}{V}[0..3].x^3$, wenn man den gemeinschaftlichen Inder so einrichtet, daß er bei jedem Gliede mit dem Exponenten von x übereinkommt. Die Variationsformen der Klasse 4 und Summe 3 aus den Elementen 0..3 sind aber leicht zu bilden. Man hat die Formen

${}^3\overset{4}{V}[0..3]$

0003 welches, realisirt, darbietet:	3. — 1. 4. — 2	= 24
0012 „ „	3. — 1. — 3. 3	= 27
0021 „ „	3. — 1. — 1. 11	= 33
0030 „ „	3. — 1. 7. 7	= — 147
0102 „ „	3. 1. 4. 3	= 36
0111 „ „	3. 1. — 3. 11	= — 99
0120 „ „	3. 1. — 1. 7	= — 21
0201 „ „	3. — 2. 4. 11	= — 264
0210 „ „	3. — 2. — 3. 7	= 126
0300 „ „	3. 1. 4. 7	= 84
1002 „ „	5. — 1. 4. 3	= — 60
1011 „ „	5. — 1. — 3. 11	= 165
1020 „ „	5. — 1. — 1. 7	= 35
1101 „ „	5. 1. 4. 11	= 220
1110 „ „	5. 1. — 3. 7	= — 105
1200 „ „	5. — 2. 4. 7	= — 280
2001 „ „	6. — 1. 4. 11	= — 264
2010 „ „	6. — 1. — 3. 7	= 126
2100 „ „	6. 1. 4. 7	= 168
3000 „ „	— 3. — 1. 4. 7	= 84

Die Summe der positiven Producte ist: 1128, die der negativen: 1240 und der Coefficient des gefoderten Gliedes ist daher $= 1128 - 1240 = -112$, und das Glied selbst $= -112x^3$.

Wenn die zu multiplicirenden Reihen unbegrenzt fortlaufen, in welchem Falle das Product selbst nicht geschlossen seyn kann, so ist die Ableitung desselben gewissermaaßen noch leichter, weil die Erzeugung der Variationsformen alsdann nicht durch eine gegebene Anzahl von Elementen beschränkt ist.

Sind der Reihen, welche sich mit einander multipliciren sollen, nur zwei:

$$\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta} \ldots + \overset{n}{a}x^{\alpha+n\delta}$$

$$\overset{0}{b}x^{\alpha} + \overset{1}{b}x^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{h}{b}x^{\alpha+h\delta} \ldots + \overset{n}{b}x^{\alpha+n\delta}$$

so ist der Coefficient des hten Gliedes des Products, oder desjenigen, welches $x^{\alpha+h\delta}$ enthält,

$$= {}^{h}\overset{2}{V}[0..n] = 0h,\ 1(h-1) \ldots r(h-r) \ldots h0$$

$$= \overset{0}{a}\overset{h}{b} + \overset{1}{a}\overset{h-1}{b} + \overset{2}{a}\overset{h-2}{b} \ldots + \overset{r}{a}\overset{h-r}{b} \ldots \overset{h}{a}\overset{0}{b}$$

Bildung eines Products aus zwei Reihen kömmt in der Analysis häufig vor, weshalb man also diese Form des Coefficienten zu merken hat.

Diese Formel kann zur Berechnung eines jeden Gliedes des Products angewandt werden, wenn beide Factoren unbegrenzt fortlaufen; brechen sie aber bei einer gewissen Höhe ab, z. B. die eine bei der nten, die andere bei der n+kten, so behält die Formel nur bis zum nten Gliede des Products diesen regelmäßigen Bau, wie aus der Bildung von ${}^{n+k}\overset{2}{V}[0..n]$ klar ist, indessen bleibt das Verfahren dennoch sehr einfach.

Unsere gewöhnlichen decadischen Zahlen sind nichts anders, als Reihen von der Form:

$$\overset{0}{a}x^{n} + \overset{1}{a}x^{n-1} + \overset{2}{a}x^{n-2} \ldots \overset{r}{a}x^{n-r} \ldots \overset{n}{a}x^{0}$$

wobei $x = 10$ angenommen worden ist. Z. B. Es ist:

$$3974123 = 3.10^{6} + 9\ 10^{5} + 7.10^{4} + 4.10^{3} + 1.10^{2} + 2.10^{1} + 3$$

Man kann daher obige Formel zur Berechnung der Glieder eines Products von zwei Reihen auch auf unsere gewöhnlichen Zahlen anwenden, wobei es aber nicht etwa nöthig ist, dieselben erst umzuschreiben, wie wir eben gethan haben. Eine leichte

Betrachtung wird das Verfahren bei diesem Multipliciren decadisch gebildeter Zahlen, welches in Absicht auf Bequemlichkeit und Kürze dem gewöhnlichen Verfahren weit vorzuziehen ist, ohne Schwierigkeiten ins Licht setzen.

§. 55.

Producte aus Factoren von der Form $(\overset{1}{a} + x), (\overset{2}{a} + x), (\overset{3}{a} + x) \ldots$

Wichtig ist noch die Betrachtung der Producte aus solchen Reihen, welche schon mit dem ersten Gliede abbrechen, und wobei die Coefficienten des ersten Gliedes = 1 sind, so, daß also das zu berechnende Product

$$(\overset{o}{a} + x).(\overset{o}{b} + x).(\overset{o}{c} + x) \ldots (\overset{o}{m} + x)$$

ist. Sind dieser Factoren k vorhanden, so ist das Product =

$$^{o}\overset{k}{V}[o, 1] + {}^{1}\overset{k}{V}[o, 1].x \ldots {}^{h}\overset{k}{V}[o, 1].x^{h} \ldots {}^{k}\overset{k}{V}[o, 1].x^{k}$$

wobei sich die Elemente o, 1 auf die Größen $\overset{o}{a}$, 1; $\overset{o}{b}$, 1; u. s. w. beziehen. Nun ist $^{k}\overset{k}{V}[o, 1] = 1^{k}$ und da das Element 1 die Größe 1 vorstellt, so fällt der Factor zu x^{k} weg.

Die Coefficienten $^{o}\overset{k}{V}[o, 1]$, $^{1}\overset{k}{V}[o, 1]$ u. s. w. sind aber noch einer bedeutenden Vereinfachung fähig. Wir wollen die k Größen $\overset{o}{a}, \overset{o}{b} \ldots \overset{o}{m}$ durch $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a} \ldots \overset{k}{a}$ bezeichnen, und Coefficienten der successiven Glieder, da sie aus den Größen $\overset{1}{a}, \overset{2}{a} \ldots \overset{k}{a}$ zusammengesetzt sind, also von k abhängen müssen, durch $^{k}\overset{o}{A}$, $^{k}\overset{1}{A}$, $^{k}\overset{2}{A} \ldots$ fingiren, so, daß wir setzen:

$$(\overset{1}{a}+x).(\overset{2}{a}+x)\ldots(\overset{k}{a}+x) = {}^{k}\overset{o}{A}_{x^{o}} + {}^{k}\overset{1}{A}_{x^{1}} + {}^{k}\overset{2}{A}_{x^{2}} \ldots {}^{k}\overset{h}{A}_{x^{h}} \ldots + {}_{x^{k}}$$

oder, wenn wir die fallende Ordnung beobachten, welches hier bequemer ist,

$$(x+\overset{1}{a}).(x+\overset{2}{a})..(x+\overset{k}{a}) = x^k + {}^k\overset{1}{A}\,x^{k-1} + {}^k\overset{2}{A}\,x^{k-2} \ldots + {}^k\overset{h}{A}\,x^{k-h} \ldots + {}^k\overset{k}{A}\,x^0$$

Kömmt noch ein folgender Factor $(x + \overset{k+1}{a})$ hinzu, so ist:

$$(x+\overset{1}{a}).(x+\overset{2}{a})..(x+\overset{k+1}{a}) = x^{k+1} + {}^k\overset{1}{A}\,x^k \ldots + {}^k\overset{h}{A}\,x^{k-h+1} \ldots + {}^k\overset{k}{A}\,x^1$$

$$+ \overset{k+1}{a}\,x^k \ldots + \overset{k+1}{a}.\,{}^k\overset{h-1}{A}\,x^{k-h+1} .. + \overset{k+1}{a}\,{}^k\overset{k-1}{A}\,x^1 + \overset{k+1}{a}\,{}^k\overset{k}{A}\,x^0$$

Der Coefficient des hten Gliedes dieses Products, welchen wir nun durch ${}^{k+1}\overset{h}{A}$ anzudeuten durch obige Annahme gezwungen sind, ist also:

$$ {}^{k+1}\overset{h}{A} = {}^k\overset{h}{A} + \overset{k+1}{a}.\,{}^k\overset{k-1}{A}$$

Aber auf eben diese Art recurriren auch die Combinationsklassen bei verbotener Wiederholbarkeit, denn es ist:

$$\overset{h}{C}'[1..(k+1)] = \overset{h}{C}'[1..k] + \overset{h-1}{C}'[1..k].(\overset{k+1}{a})$$

so, daß sich die in den Klammern stehenden Elemente auf $\overset{1}{a}, \overset{2}{a} .. \overset{r+1}{a}$ beziehen. Man hat daher:

$$ {}^{k+1}\overset{h}{A} = \overset{k+g}{C}'[1..(k+1+n)]$$

wobei es noch nöthig ist, die fingirten Constanten n und g zu bestimmen.

Das Glied dieses Productes, welches kein x mehr enthält, muß die Größen $\overset{1}{a}, \overset{2}{a} .. \overset{k+1}{a}$ als Factoren in sich schließen, und ist daher $= \overset{k+1}{C}'[1..(k+1)]$. Setzt man daher in obigem Ausdrucke für h den Werth $k+1$, so hat man:

$$\overset{k+1}{C}'[1..(k+1)] = \overset{k+1+g}{C}'[1..(k+1+n)]$$

woraus folgt, daß beide Constanten $= 0$ seyn müssen. Man hat daher:

$$ {}^{k+1}\overset{h}{A} = \overset{h}{C}'[1..(k+1)]$$

oder für $k+1$ den Werth k gesetzt:

$$^{k}\overset{h}{A} = \overset{h}{C}`[1..k]$$

also:

$$(x+\overset{1}{a})(x+\overset{2}{a})\ldots(x+\overset{k}{a}) = x^{k} + \overset{1}{C}`[1..k].x^{k-1}\ldots + \overset{h}{C}`[1..n].x^{k-h}\ldots + \overset{k}{C}`[1..k]$$

wobei die Elemente als Factoren, die Formen als Theile angesehen werden. Kehrt man die einzelnen Factoren um, d. h. macht man die Größen a zu ersten, x zum zweiten Theile, so würde auch das Product die steigende Ordnung befolgt haben.

Sind die Größen $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$ ... alle negativ, so werden die Producte aus ihnen, welche eine unpaare Menge derselben als Factoren in sich schließen, so wie auch die Inbegriffe solcher Producte negativ werden, d. h. da allgemein $\overset{2n+1}{C}`[1..k]$ den Inbegriff einzelner Producte von einer unpaaren Anzahl von Factoren anzeigt, es werden alsdann alle diejenigen Glieder negativ werden, welche von unpaarem Range sind, als $\overset{1}{C}`[1..k]x^{k-1}$, $\overset{3}{C}`[1..k]x^{k-3}$ u. s. f.

Man hat also:

$$(x-\overset{1}{a}).(x-\overset{2}{a})..(x-\overset{k}{a}) = x^{k} - \overset{1}{C}`[1..k]x^{k-1}\ldots + (-1)^{h}\overset{h}{C}`[1..k]x^{k-h}\ldots + (-1)^{k}\overset{k}{C}`[1..k]$$

Dieser Satz ist für die Algebra Fundamentalsatz, weil eine jede Gleichung aus Factoren von der Form $(x-\overset{1}{a})$, $(x-\overset{2}{a})$... zusammengesetzt ist, und die Auflösung der Gleichungen weiter nichts fodert, als das Aufsuchen dieser einzelnen Factoren. In wiefern dieses möglich oder unmöglich ist, ist hier nicht der Ort zu untersuchen.

Vierter Abschnitt.

Von der Division zusammengesetzter Formen.

---

§. 56.

Recurrirende Bestimmung der Glieder eines Quotienten von der Form

$$\frac{1}{\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots}$$

Die allgemeinste Form eines Quotienten, dessen Dividend und Divisor nach Potenzen einer Hauptgröße fortschreiten, ist:

$$\frac{\overset{0}{b}x^{\alpha} + \overset{1}{b}x^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{h}{b}x^{\alpha+h\delta} \ldots}{\overset{0}{a}x^{a} + \overset{1}{a}x^{a+d} \ldots + \overset{h}{a}x^{a+hd} \ldots}$$

Will man diesen Quotienten in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln, so muß diese so beschaffen seyn, daß das Product aus ihr und dem Divisor dem Dividend gleich wird. Man kann daher den verlangten Quotienten fingiren, das Product aus ihm in den Divisor berechnen und dieses dem Dividend gleich setzen; alsdann muß zuerst die Form dieses Products der des Dividends gleich seyn, d. h. die Exponenten desselben müssen dieselbe arithmetische Progression bilden, als die des Dividends, woraus man die fingirten Exponenten des Quotienten ableiten kann. Ferner müssen, wenn Gleichheit beider Formen bestehen soll, gleich hohe Glieder in beiden gleich seyn, woraus man im Stande seyn wird, auch die fingirten Coefficienten des Quotienten zu bestimmen.

Man setze daher:

$$\frac{\overset{0}{b}x^{\alpha} + \overset{1}{b}x^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{h}{b}x^{\alpha+h\delta} \ldots}{\overset{0}{a}x^{a} + \overset{1}{a}x^{a+d} \ldots + \overset{h}{a}x^{a+hd} \ldots} = \overset{0}{A}x^{\beta} + \overset{1}{A}x^{\beta+\gamma} \ldots + \overset{h}{A}x^{\beta+h\gamma} \ldots$$

so, daß also:

$$\overset{0}{b}x^{\alpha} + \overset{1}{b}x^{\alpha+\delta} \ldots \overset{h}{b}x^{\alpha+h\delta} = (\overset{0}{A}x^{\beta} + \overset{1}{A}x^{\beta+\gamma} \ldots \overset{h}{A}x^{\beta+h\gamma} \ldots).(\overset{0}{a}x^{a} + \overset{1}{a}x^{a+d} \ldots \overset{h}{a}x^{a+hd} \ldots)$$

Nun ist aber aus der Lehre von der Multiplication klar, daß nur solche Reihen, wenn man sie multiplicirt, ein Product geben können, dessen Glieder successiv nach δ fortschreiten, welche selbst die Form haben. Hieraus folgt also, daß sowohl a, als $\beta = \delta$ seyn müssen, wenn obige Bedingung wirklich statt finden soll.

Hat man also a und $\beta = \delta$ angenommen, und berechnet das Product, so werden die Exponenten seiner Glieder zum ersten Theile $a + \beta$, zum zweiten aber die successiven Vielfachen von δ haben, woraus wieder folgt, daß $a + \beta = \alpha$, oder $\beta = \alpha - a$ seyn muß. Die Form des Divisors richtet sich also insofern nach der des Dividends, daß die Differenz in dem Exponenten δ in beiden einerlei seyn muß, während man den ersten Theil der Exponenten des Divisors willkührlich anzunehmen berechtigt ist.

Man hat also

$$\frac{\overset{0}{b}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots \overset{h}{b}x^{\alpha+h\delta} \ldots}{\overset{0}{a}x^{a} + \overset{1}{a}x^{a+\delta} \ldots \overset{h}{a}x^{a+h\delta} \ldots} = \overset{0}{A}x^{\alpha-a} + \overset{1}{A}x^{\alpha-a+\delta} \ldots + \overset{h}{A}x^{\alpha-a+h\delta} \ldots$$

und:

$$\overset{0}{b}x^{\alpha} + \overset{1}{b}x^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{h}{b}x^{\alpha+h\delta} \ldots = (\overset{0}{A}x^{\alpha-a} + \overset{1}{A}x^{\alpha-a+\delta} \ldots + \overset{h}{A}x^{\alpha-a+h\delta} \ldots).(\overset{0}{a}x^{a} + \ldots \overset{h}{a}x^{a+h\delta} \ldots)$$

Das Product ist =

$$\overset{0}{A}\overset{0}{a}x^{\alpha} + \ldots + (\overset{0}{A}\overset{h}{a} + \overset{1}{A}\overset{h-1}{a} + \ldots + \overset{r}{A}\overset{h-r}{a} \ldots + \overset{h}{A}\overset{0}{a})x^{\alpha+h\delta} \ldots$$

und da dieses dem Dividend gleich seyn soll, so hat man $\overset{0}{A}\overset{0}{a} = \overset{0}{b}$, also $\overset{0}{A} = \frac{\overset{0}{b}}{\overset{0}{a}}$ und allgemein:

$$\overset{h}{b} = \overset{0}{A}\,\overset{h}{a} + \overset{1}{A}\,\overset{h-1}{a} \dots + \overset{r}{A}\,\overset{h-r}{a} \dots + \overset{h}{A}\,\overset{0}{a}$$

Hiedurch sind wir auf eine recurrirende Beziehung unter den fingirten Coefficienten gekommen, denn es folgt hieraus, daß:

$$\overset{h}{A} = \frac{\overset{h}{b} - \overset{h-1}{A}\,\overset{1}{a} - \overset{h-2}{A}\,\overset{2}{a} \dots - \overset{h-r}{A}\,\overset{r}{a} \dots - \overset{0}{A}\,\overset{h}{a}}{\overset{0}{a}}$$

ist.

Einfacher wird diese Recursionsformel, wenn man den Dividend nicht eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe, sondern die Einheit seyn läßt. Alsdann sind die Coefficienten $\overset{1}{b}, \overset{2}{b} \dots \overset{4}{b}$, sämtlich $= 0$, $\overset{0}{b} = 1$ und $\alpha = 0$, und man hat, wenn man diese Werthe substituirt:

$$\frac{1}{\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \dots + \overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta} \dots} = \overset{0}{A}x^{-\alpha} + \overset{1}{A}x^{-\alpha+\delta} \dots + \overset{h}{A}x^{-\alpha+h\delta} \dots$$

und

$$\overset{h}{A} = \frac{-\overset{h-1}{A}\,\overset{1}{a} - \overset{h-2}{A}\,\overset{2}{a} - \dots - \overset{h-r}{A}\,\overset{r}{a} \dots - \overset{0}{A}\,\overset{h}{a}}{\overset{0}{a}}$$

oder:

$$\overset{h}{A} = \overset{h-1}{A}\left(-\frac{\overset{1}{a}}{\overset{0}{a}}\right) + \overset{h-2}{A}\left(-\frac{\overset{2}{a}}{\overset{0}{a}}\right) \dots + \overset{h-r}{A}\left(-\frac{\overset{r}{a}}{\overset{0}{a}}\right) \dots + \overset{0}{A}\left(-\frac{\overset{h}{a}}{\overset{0}{a}}\right)$$

Um also einen gewissen Coefficienten des Quotienten durch diese Recursion zu berechnen, nehme man alle Coefficienten des Divisors mit umgekehrten Zeichen, dividire sie durch den Anfangscoefficienten, und verbinde diese Größen mit den früheren schon berechneten Coefficienten des Quotienten dergestalt, daß sich die erste, $-\frac{\overset{1}{a}}{\overset{0}{a}}$, mit dem nächstniedrigen, die zweite, $-\frac{\overset{2}{a}}{\overset{0}{a}}$, mit dem darauf folgenden u. s. w. die endlich, welche im Range mit dem gesuchten Coefficienten des Quotienten übereinkommt, mit dem Anfangscoefficienten des Quotienten, $\overset{0}{A} = \frac{1}{a}$, durch Multiplication vereinige und addire zuletzt alle diese Producte zusammen.

Vermöge dieser Recursionsformel ist es nun leicht, jeden Quotienten von obiger Form wirklich darzustellen.

Ist z. B. der Quotient: $\frac{1}{1 - x + 3x^2 + 4x^3 - x^4}$ gegeben, und wird verlangt, die Entwickelung nach obiger Formel vorzunehmen, so fingire man ihn zuerst, indem man ihn

$$= \overset{0}{A} + \overset{1}{A}_x + \overset{2}{A}_{x^2} + \overset{3}{A}_{x^3} \ldots$$

setzt, wobei $\overset{0}{A} = 1$ ist. Die Größen, welche man in der Recursion mit den successiven Coefficienten verbindet, sind $+1$, -3, -4, $+1$, und es ist also:

$$\overset{1}{A} = \overset{0}{A} . 1 = 1$$

$$\overset{2}{A} = \overset{1}{A} . 1 + \overset{0}{A} . (-3) = 1 - 3 = -2$$

$$\overset{3}{A} = \overset{2}{A} . 1 + \overset{1}{A} . (-3) + \overset{0}{A} (-4) = -2 - 3 - 4 = -9$$

$$\overset{4}{A} = \overset{3}{A} . 1 + \overset{2}{A} . (-3) + \overset{1}{A} (-4) + \overset{0}{A} . 1 = -9 + 6 - 4 + 1 = -6$$

und man hat daher:

$$\frac{1}{1 - x + 3x^2 + 4x - x^4} = 1 + x - 2x^2 - 9x^3 - 6x^4 \ldots$$

Hätte man ferner den Quotienten:

$$\frac{1}{3 + x - 2x^2 + 3x^3 - 7x^4 - 3x^5}$$

zu entwickeln, so würden die Größen, welche sich in der Recursion mit den successiv frühern Coefficienten zur Berechnung des nächsthöheren vereinigen müssen, $-\frac{1}{3}$, $+\frac{2}{3}$, -1, $+\frac{7}{3}$, $+1$, seyn. Fingirt man nun die Coefficienten $\overset{0}{A}$, $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$ u. s. w. wobei $\overset{0}{A} = \frac{1}{3}$ ist, so findet man:

$$\overset{1}{A} = \overset{0}{A} . (-\tfrac{1}{3}) = -\tfrac{1}{9}$$

$$\overset{2}{A} = \overset{1}{A}\cdot(-\tfrac{1}{3}) + \overset{0}{A}\cdot\tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{27} + \tfrac{2}{9} = \tfrac{7}{27}$$

$$\overset{3}{A} = \overset{2}{A}\cdot(-\tfrac{1}{3}) + \overset{1}{A}\cdot\tfrac{2}{3} + \overset{0}{A}\,(-1) = -\tfrac{7}{81} - \tfrac{2}{27} - \tfrac{1}{3} = -\tfrac{40}{81}$$

$$\overset{4}{A} = \overset{3}{A}\cdot(-\tfrac{1}{3}) + \overset{2}{A}\cdot\tfrac{2}{3} + \overset{1}{A}\,(-1) + \overset{0}{A}\cdot\tfrac{7}{3} = \tfrac{40}{243} + \tfrac{14}{81} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{7}{9} = \tfrac{298}{243}$$

also ist:

$$\frac{1}{3 + x - 2x^2 + 3x^3 - 7x^4 - 3x^5} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{9}x + \tfrac{7}{27}x^2 - \tfrac{40}{81}x^3 + \tfrac{298}{243}x^4 \,..$$

Hat man ferner

$$\frac{1}{-4 + 3x + 5x^2 - x^3 - 7x^4} = -\tfrac{1}{4} + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 \ldots$$

so sind die Größen, vermöge deren die Recursion vollzogen wird: $+\frac{3}{4}$, $+\frac{5}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{7}{4}$ und daher:

$$\overset{1}{A} = -\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{4} = -\tfrac{3}{16};$$

$$\overset{2}{A} = \overset{1}{A}\cdot\tfrac{3}{4} + \overset{0}{A}\cdot\tfrac{5}{4} = -\tfrac{9}{64} - \tfrac{5}{16} = -\tfrac{29}{64}$$

$$\overset{3}{A} = \overset{2}{A}\cdot\tfrac{3}{4} + \overset{1}{A}\cdot\tfrac{5}{4} + \overset{0}{A}\,(-\tfrac{1}{4}) = -\tfrac{87}{256} - \tfrac{15}{64} + \tfrac{1}{16} = -\tfrac{131}{256}$$

u. s. w. also:

$$\frac{1}{-4 + 3x + 5x^2 - x^3 - 7x^4} = -\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{16}x - \tfrac{29}{64}x^2 - \tfrac{131}{256}x^3 \ldots$$

§. 57.

Independente Bestimmung der Glieder eines Quotienten.

Verlangt man nur ein Glied des Quotienten darzustellen, ohne die früheren schon berechnet zu haben, so ist eine independente Regel der Erzeugung erfoderlich.

Die allgemeine Recursionsformel ist:

$$\overset{h}{A} = \overset{h-1}{A}\left(-\frac{\overset{1}{a}}{a}\right) + \overset{h-2}{A}\left(-\frac{\overset{2}{a}}{a}\right) \ldots + \overset{h-r}{A}\cdot\left(-\frac{\overset{r}{a}}{a}\right) \ldots + \overset{0}{A}\cdot\left(-\frac{\overset{h}{a}}{a}\right)$$

oder da $\overset{0}{A} = \frac{1}{a}$ ist,

$$_{a.}\overset{h}{A} = {}_{a.}\overset{h-1}{A}.(-\frac{\overset{1}{a}}{a}) + {}_{a.}\overset{h-2}{A}(-\frac{\overset{2}{a}}{a}) \dots + {}_{a.}\overset{h-r}{A}(-\frac{\overset{r}{a}}{a}) \dots {}_{a.}\overset{1}{A}(-\frac{\overset{h-1}{a}}{a}) + (-\frac{\overset{h}{a}}{a})$$

Diese Recursionsformel für $a.\overset{h}{A}$ ist aber mit der für ${}^{h}V[-\frac{\overset{1}{a}}{a}, -\frac{\overset{2}{a}}{a} \dots]$ identisch, denn es ist:

$$^{h}V[-\frac{\overset{1}{a}}{a}..] = {}^{h-1}V[-\frac{\overset{1}{a}}{a}..].(-\frac{\overset{1}{a}}{a}) + {}^{h-2}V[-\frac{\overset{1}{a}}{a}..].(-\frac{\overset{2}{a}}{a}) \dots$$
$$+ {}^{h-r}V[-\frac{\overset{1}{a}}{a}..].(-\frac{\overset{r}{a}}{a}) \dots + (-\frac{\overset{h}{a}}{a})$$

(§. 44.) folglich hat man:

$$_{a.}\overset{h}{A} = {}^{h+g}V[-\frac{\overset{1}{a}}{a}..] \text{ oder}$$
$$\overset{h}{A} = \frac{1}{a}.{}^{h+g}V[-\frac{\overset{1}{a}}{a}..]$$

für $h = 0$ ist $\overset{h}{A} = \frac{1}{a}$, also ist

$$\frac{1}{a}.{}^{g}V[-\frac{\overset{1}{a}}{a}..] = \frac{1}{a}, \text{ d. h. } g = 0, \text{ weil } {}^{0}V[-\frac{\overset{1}{a}}{a}..]$$

das combinatorische Null, also als Factor angesehen $= 1$ ist. (§. 15. S. 43.)

Man hat also

$$\overset{h}{A} = \frac{1}{a}.{}^{h}V[-\frac{\overset{1}{a}}{a}..]$$

Da sich aber das Zeichen $\overset{r}{V}$ nur auf eine Reihe von Elementen bezieht, nämlich auf $-\frac{\overset{1}{a}}{a}, \frac{\overset{2}{a}}{a} \dots$, so kann man statt dessen das Zeichen $_{p}C$ gebrauchen, (§. 44.) wodurch die Ausdrücke noch einfacher werden.

Es ist also:

$$\frac{1}{\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \dots \overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta} \dots} = (x^{-\alpha} + {}^{2}_{p}C[1..].x^{-\alpha+\delta} \dots + {}^{h}_{p}C[1..]x^{-\alpha+h\delta} \dots).\frac{1}{a}$$

wobei sich die Elemente 1, 2.. auf die Größen $-\frac{\overset{1}{a}}{a}$, $-\frac{\overset{2}{a}}{a}$, $-\frac{\overset{3}{a}}{a}$ ... beziehen, so daß man bei der Realisation der Formen die Elemente als Factoren, diese aber als Theile ansiehet. Z. B.

Man sucht den dritten Coefficienten des Quotienten, welcher aus der Entwickelung von $\frac{1}{1 - x + 3x^2 + 4x^3 - x^4}$ entstehet, so ist dieser: ${}^{3}_{p}C[1..4]$, wobei sich die Elemente auf die Zahlen 1, — 3, — 4, 1 beziehen.

Nun ist:

$$\begin{array}{rlcr} {}^{3}_{p}C[1..4] = & 111 & \text{realisirt} & = 1 \\ & 2.(12) & \text{〃 〃} & = -6 \\ & 3 & \text{〃 〃} & = -4 \end{array}$$

Die Summe dieser realisirten Formen ist — 9 und das verlangte Glied also $= - 9x^3$, wie oben. Würde das vierte Glied desselben Quotienten gefodert, so wäre dieses:

$$\begin{array}{rlcr} {}^{4}_{p}C[1..4] = & 1111 & \text{welches realisirt} & = 1 \text{ ist} \\ & 3.(112) & \text{〃 〃} & = -9 \\ & 2.(13) & \text{〃 〃} & = -8 \\ & 22 & \text{〃 〃} & = +9 \\ & 4 & \text{〃 〃} & = 1 \end{array}$$

und die Summe der realisirten Formen, also der verlangte Coefficient ist: — 6, wie oben.

Suchen wir ferner von dem Quotienten:

$$\frac{1}{3 + x - 2x^2 + 3x^3 - 7x^4 - 3x^5}$$

den Coefficienten, welcher zu x^4 gehört, so ist dieser $= {}^{4}_{p}C[1..5].\frac{1}{3}$, wobei sich die Elemente 1.. auf die Zahlen: $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, -1, $\frac{7}{3}$, 1, beziehen. Nun ist:

$$\begin{array}{rlcr} {}^{4}_{p}C[1..5].\frac{1}{3} = & \frac{1}{3}.(1111) & \text{realisirt:} & = \frac{1}{243}, \\ & \frac{1}{3}.3.(112) & \text{〃 〃} & = \frac{2}{27} \\ & \frac{1}{3}.2.(13) & \text{〃 〃} & = \frac{2}{9} \\ & \frac{1}{3}.(22) & \text{〃 〃} & = \frac{4}{27} \\ & \frac{1}{3}.(4) & \text{〃 〃} & = \frac{7}{9} \end{array}$$

Die Summe dieser realisirten Formen ist nun $\frac{228}{243}$ und daher das verlangte Glied $= \frac{228}{243} x^4$, wie oben.

Wird ferner von dem Quotienten:

$$\frac{1}{-4 + 3x + 5x^2 - x^3 - 7x^4}$$

dasjenige Glied zu berechnen verlangt, welches x^3 enthält, so ist der Coefficient: $= (-\frac{1}{4}) . {}^3_p C [1 \, . \, . \, 4]$, wo sich die Elemente auf die Zahlen $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $- \frac{1}{4}$, $- \frac{7}{4}$ beziehen.

Nun ist:

$$(-\tfrac{1}{4}) . {}^3_p C [1 \, . \, . \, 4] = - \tfrac{1}{4} . (111) \text{ realisirt } = - \tfrac{27}{256}$$
$$- \tfrac{1}{4} . 2 . (12) \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = - \tfrac{15}{32}$$
$$- \tfrac{1}{4} . (3) \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = \tfrac{1}{16}$$

Das Aggregat dieser Brüche ist $= - \frac{131}{256}$, welches also der der Coefficient zu x^3 ist, wie wir auch oben fanden.

§. 58.

Bestimmung der Glieder des Restes.

Laufen die Glieder des Divisors unbegrenzt fort, so kann es kein Glied des Quotienten geben, dessen Berechnung unmöglich wäre, denn ${}^4_p C [1 \, . \, . \,]$ ist immer darstellbar, h mag so groß seyn, wie man will. Brechen sie aber bei einem gewissen rten Gliede ab, so sind die Elemente, woraus sich die Combinationsformen bilden sollen, beschränkt, und dann sind die Coefficienten nur so lange Combinationsformen zu einer gewissen Summe aus einer unbegrenzten Reihe von Elementen gebildet, so lange ihr Index nicht größer ist als r, und diese Voraussetzung wurde bei dem Uebergange von der recurrirenden zur independenten Bestimmung gemacht. Brechen also die Glieder des Divisors bei dem rten Gliede ab, so sind auch nur r Glieder des Quotienten nach dem anfänglichen nach dieser independenten Regel darstellbar.

In diesem Falle, oder wenn auch die Glieder des Divisors unbegrenzt fortlaufen, und man will bei irgend einem der nun gleichfalls unbegrenzt fortlaufenden Glieder des Quotienten stehen bleiben, bleibt jedesmal ein Rest noch zu betrachten übrig.

Wenn man das Product aus dem Divisor und dem Quotienten vom Dividend abziehet, so heißt dasjenige, was übrig bleibt, der Rest. Der Quotient muß also bekannt seyn, wenn man den Rest berechnen will.

Hat man:

$$\frac{1}{\overset{0}{a}x^{\alpha}+\overset{1}{a}x^{\alpha+\delta}\ldots\overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta}\ldots}=\frac{1}{a}\cdot\left[x^{-\alpha}+{}^{1}_{p}C_{[1..]}x^{-\alpha+\delta}\ldots+{}^{h}_{p}C_{[1..]}x^{-\alpha+h\delta}\ldots\right]+R$$

wo R den Rest bedeutet, und bricht man bei dem $h$ten Gliede des Quotienten ab, so ist:

$$R=1-\frac{1}{a}\left[x^{-\alpha}\ldots+{}^{h}_{p}C_{[1..]}x^{-\alpha+h\delta}\right]\cdot\left[\overset{0}{a}x^{\alpha}\ldots\overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta}\ldots\right]$$

Das Product ist:

$$\frac{1}{a}\Big[a+\left[a\cdot{}^{1}_{p}C_{[1..]}+\overset{1}{a}\right]x^{\delta}\ldots+\left[\overset{1}{a}\cdot{}^{h}_{p}C_{[1..]}+\overset{2}{a}\,{}^{h-1}C_{[1..]}\ldots\right.$$
$$\left.\overset{h}{a}\,{}^{1}_{p}C_{[1..]}+\overset{h+1}{a}\right]x^{(h+1)\delta}\ldots+\left[\overset{r}{a}\cdot{}^{h}_{p}C_{[1..]}+\overset{r+1}{a}\cdot{}^{h-1}_{p}C_{[1..]}\ldots\right.$$
$$\left.+\overset{r+p}{a}\cdot{}^{h-p}_{p}C_{[1..]}\ldots+\overset{r+h}{a}\right]x^{(h+r)\delta}\ldots\Big]$$

Ziehet man dieses von der Einheit ab, so ist, da die Glieder bis $x^{h\delta}$ ihr schon gleich sind, der Rest die folgenden Glieder, nur jedes mit dem umgekehrten Zeichen genommen, d. h. also das $r$te Glied des Restes ist

$$=-\frac{1}{a}\cdot\left[{}^{h}_{p}C_{[1..]}\cdot\overset{r}{a}+{}^{h-1}_{p}C_{[1..]}\cdot\overset{r+1}{a}\ldots+{}^{h-p}_{p}C_{[1..]}\cdot\overset{r+p}{a}\ldots+\overset{h+r}{a}\cdot\right]x^{(h+r)\delta}$$

Brechen wir aber die Glieder des Divisors bei dem $h$ten Gliede ab, oder gedenkt man sich die folgenden Coefficienten $\overset{h+1}{a},\ \overset{h+2}{a}\ldots=0$ gesetzt, so fallen alle diejenigen Glieder in diesem Ausdrucke weg, in welchen frühere Coefficienten des Divisors, als der $h$te vorkommen. Setzt man in dem allgemeinen Gliede des Ausdrucks für $r+p$ den Werth h, so, daß also $p=h-r$ ist, so wird dieses das letzte Glied seyn, und er ist alsdann:

$$-\frac{1}{a}\cdot\left[{}^{h}_{p}C_{[1..]}\cdot\overset{r}{a}+{}^{h-1}_{p}C_{[1..]}\overset{r+1}{a}\ldots+{}^{h-p}_{p}C_{[1..]}\cdot\overset{r+p}{a}\ldots+{}^{r}_{p}C_{[1..]}\overset{h}{a}\cdot\right]x^{(h+r)\delta}$$

Ist der Divisor unbegrenzt, so wird es auch der Rest seyn, denn die Multiplication eines unbegrenzten Factors giebt ein unbegrenztes Product. Sind hingegen die Glieder des Divisors begrenzt, so wird es auch der Rest seyn. Hat der Divisor h Glieder, so hat der Quotient eben so viel, beide mit einander multiplicirt, werden

ein Product von $2h$ Gliedern geben, welche vom Dividend abgezogen werden müssen, wenn man den Rest erhalten will. Da nun aber die h ersten Glieder dem Dividend schon gleich sind, so folgt, daß der Rest eben so viel Glieder haben müsse, als der Divisor.

3. B. Wir haben oben gesehen, daß

$$\frac{1}{1 - x + 3x^2 + 4x^3 - x^4} = 1 + x - 2x^2 - 9x^3 - 6x^4$$

ist. Hier ist also das erste Glied des Rests

$$= -(6.(-1) - 9.3 - 2.4 + 1(-1)) = 30$$

das zweite $= -(-6.3 - 9.4. - 2(-1)) = 52$

das dritte $= -(-6.4 - 9.(-1)) = 15$

das vierte $= -(-6.(-1)) = -6$

also ist der Rest:

$$= 30x^5 + 52x^6 + 15x^7 - 6x^8.$$

§. 59.

Recurrirende Bestimmung der Glieder eines Quotienten von der Form: $\dfrac{\overset{0}{b}x^{\alpha} + \overset{1}{b}x^{\alpha+\delta} \ldots}{\overset{0}{a}x^{a} + \overset{1}{a}x^{a+\delta} \ldots}$

Ist der Dividend nicht die Einheit, sondern selbst eine nach Potenzen der Hauptgröße fortschreitende Form, so wird sich zwar die recurrirende Bestimmung ziemlich ähnlich bleiben, allein die independente Bestimmung wird von der des einfacheren Falles gänzlich verschieden ausfallen.

Fingiren wir den Quotienten:

$$\frac{\overset{0}{b}x^{\alpha} + \overset{1}{b}x^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{h}{b}x^{\alpha+h\delta} \ldots}{\overset{0}{a}x^{a} + \overset{1}{a}x^{a+\delta} \ldots + \overset{h}{a}x^{a+h\delta} \ldots} = \overset{0}{A}x^{\alpha-a} + \overset{1}{A}x^{\alpha-a+\delta} \ldots + \overset{h}{A}x^{\alpha-a+h\delta} \ldots$$

so fanden wir unter den Coefficienten der Recursionsformel:

$$\overset{h}{A} = \frac{\overset{h}{b} - [\overset{1}{a}\overset{h-1}{A} + \overset{2}{a}\overset{h-2}{A} \ldots + \overset{r}{a}\overset{h-r}{A} \ldots + \overset{h}{a}\overset{0}{A}]}{\overset{0}{a}}$$

oder:

$$\overset{h}{A} = \frac{\overset{h}{b}}{a} + \overset{h-1}{A}\left(-\frac{\overset{1}{a}}{a}\right) + \overset{h-2}{A}\left(-\frac{\overset{2}{a}}{a}\right) \ldots + \overset{h-r}{A}\left(-\frac{\overset{r}{a}}{a}\right) \ldots + \overset{o}{A}\left(-\frac{\overset{h}{a}}{a}\right)$$

d. h. um den hten Coefficienten des Quotienten zu finden, berechne man ihn wie in dem einfacheren Falle, wo der Dividend die Einheit war, aber statt diese so gefundene Größe als vollständigen Coefficienten zu setzen, addire man sie zum hten Coefficienten des Dividends, welchen man zuvor durch den Anfangscoefficienten dividirt hat.

Für $h = o$ ist $\overset{o}{A} = \frac{\overset{o}{b}}{\overset{o}{a}}$

Z. B. man habe

$$\frac{3 - 2x + 5x^2 - 3x^3}{2 + x + 3x^2 - 5x^3} = \overset{o}{A} + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \overset{3}{A}x^3$$

wo $\overset{o}{A} = \frac{3}{2}$ ist, so sind die Zahlen, welche man mit den successiven Coefficienten des Quotienten verbinden muß, um den nachfolgenden zu erhalten, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $+\frac{5}{2}$, und man hat daher:

$$\overset{1}{A} = -1 + \tfrac{3}{2}(-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{7}{4}$$

$$\overset{2}{A} = \tfrac{5}{2} - \tfrac{7}{4}(-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{3}{2}(-\tfrac{3}{2}) = \tfrac{9}{8}$$

$$\overset{3}{A} = -\tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{8}\cdot(-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{7}{4}(-\tfrac{3}{2}) + \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{2} = \tfrac{69}{16}$$

also ist:

$$\frac{3 - 2x + 5x^2 - 3x^3}{2 + x + 3x^2 - 5x^3} = \tfrac{3}{2} - \tfrac{7}{4}x + \tfrac{9}{8}x^2 + \tfrac{69}{16}x^3 + \text{Rest.}$$

Hat man ferner:

$$\frac{7 - 3x - 2x^2 + 5x^3 - x^4}{4 + x - 9x^2 + 2x^3 + 5x^4}$$

zu entwickeln, so sind die Zahlen, durch deren Verbindung die successiven Coefficienten des Quotienten berechnet werden, $-\frac{1}{4}$, $+\frac{9}{4}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{4}$, ferner ist $\overset{o}{A} = \frac{7}{4}$ und man hat daher:

$$\overset{1}{A} = -\tfrac{3}{4} + \tfrac{7}{4}\cdot(-\tfrac{1}{4}) = -\tfrac{19}{16}$$

$$\overset{2}{A} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{19}{16}\cdot(-\tfrac{1}{4}) + \tfrac{7}{4}\cdot\tfrac{9}{4} = \tfrac{239}{64}$$

$$\overset{3}{A} = \tfrac{5}{4} + \tfrac{239}{64}(-\tfrac{1}{4}) - \tfrac{19}{16}\cdot\tfrac{9}{4} + \tfrac{7}{4}\cdot(-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{827}{256}$$

$$\overset{4}{A} = -\tfrac{1}{4} - \tfrac{827}{256}\cdot(-\tfrac{1}{4}) + \tfrac{239}{64}\cdot\tfrac{9}{4} - \tfrac{19}{16}\cdot(-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{7}{4}(-\tfrac{5}{4}) = \tfrac{7543}{1024}$$

also ist der Quotient:

$$\frac{7 - 3x - 2x^2 + 5x^3 - x^4}{4 + x - 9x^2 + 2x^3 + 5x^4} + \tfrac{7}{4} - \tfrac{19}{16}x + \tfrac{239}{64}x^2 - \tfrac{827}{256}x^3 + \tfrac{7543}{1024}x^4 + \text{Rest.}$$

§. 60.

Independente Bestimmung.

Diese folgt unmittelbar aus der independenten Bestimmung bei dem einfacheren Falle, wo der Dividend der Einheit gleich war. Es ist:

$$\frac{1}{\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots \overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta} \ldots} = \tfrac{1}{a}\left(x^{-\alpha} + {}^{1}_{p}C[1\ldots].x^{-\alpha+\delta}_{\ldots} + {}^{h}_{p}C[1\ldots]\,x^{-\alpha+h\delta}_{\ldots}\right)$$

also ist:

$$\frac{\overset{0}{b}x^{a} + \overset{1}{b}x^{a+\delta} \ldots \overset{h}{b}x^{a+h\delta} \ldots}{\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots \overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta} \ldots} = \tfrac{1}{a}\left(x^{-\alpha} + {}^{1}_{p}C[1\ldots]\,x^{-\alpha+\delta}_{\ldots}\right)\left(\overset{0}{b}x^{a} + \overset{1}{b}x^{a+\delta} \ldots \overset{h}{b}x^{a+h\delta} \ldots\right)$$

$$= \tfrac{1}{a}\Big[\overset{0}{b}x^{a-\alpha} + \ldots \Big(\overset{0}{b}\,{}^{h}_{p}C[1\ldots] + \overset{1}{b}\,{}^{h-1}_{p}C[1\ldots] \ldots \overset{r}{b}\,{}^{h-r}_{p}C[1\ldots] \ldots$$

$$\overset{h-1}{b}\,{}^{1}_{p}C[1\ldots] + \overset{h}{b}\Big)x^{a-\alpha+h\delta}_{\ldots}\Big]$$

Man hat daher für den hten Coefficienten des Quotienten folgenden independenten Ausdruck:

$$\overset{h.}{A} = \tfrac{1}{a}\left[{}^{h}_{p}C\,[1\ldots].\overset{0}{b} + {}^{h-1}_{p}C[1\ldots].\overset{1}{b} \ldots + {}^{h-r}C[1\ldots]\,\overset{r}{b} \ldots \overset{h}{b}\right]$$

wobei sich die Elemente 1, 2 .. auf die Größen $\left[-\frac{\overset{1}{a}}{a}\right]$, $\left[-\frac{\overset{2}{a}}{a}\right]$ .. beziehen.

z. B. der erste Coefficient von

$$\frac{5 - 2x + 5x^2 - 3x^3}{2 + x + 3x^2 - 5x^3} \text{ ist } = \frac{{}^{1}_{p}C[1..].3 + (-2)}{2}$$

Nun ist ${}^{1}_{p}C[1..] = 1$, welches realisirt $= -\frac{1}{2}$ ist, daher findet man

$$\overset{1}{A} = (-\tfrac{3}{2} - 2).\tfrac{1}{2} = -\tfrac{7}{4}$$

Der dritte Coefficient ist =

$$\overset{3}{A} = \tfrac{1}{2}[{}^{3}_{p}C[1..].3 + {}^{2}_{p}C[1..].(-2) + {}^{1}_{p}C[1..].5 + (-3)]$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} {}^{3}_{p}C[1..] = 111 \text{ realisirt } &= -\tfrac{1}{8} \\ 2.(12) \text{ " " } &= \tfrac{3}{2} \\ 3 \text{ " " } &= \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

und die Summe dieser realisirten Formen ist $= \frac{31}{8}$. Ferner ist:

$$\begin{aligned} {}^{2}_{p}C[1..] = 11 \text{ realisirt } &= \tfrac{1}{4} \\ 2 \text{ " " } &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

folglich ${}^{2}_{p}C[1..] = -\frac{5}{4}$. Endlich hat man:

$${}^{1}_{p}C[1..] = 1 \text{ realisirt } = -\tfrac{1}{2}$$

folglich wird

$$\overset{3}{A} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{31}{8}.3 + (-\tfrac{5}{4})(-2) + (-\tfrac{1}{2}).5 + (-3)) = \tfrac{69}{16}$$

wie oben.

Will man ferner den 2ten Coefficienten des Quotienten

$$\frac{7 - 3x - 2x^2 + 5x^3 - x^4}{4 + x - 9x^2 + 2x^3 + 5x^4}$$

berechnen, so ist dieser =

$$\overset{2}{A} = \tfrac{1}{4}[{}^{2}_{p}C[1..].7 + {}^{1}_{p}C[1..].(-3) + (-2)]$$

Nun ist:

$${}^{2}_{p}C[1..] = \left.\begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix}\right\} \text{ realisirt } = \tfrac{1}{16} + \tfrac{9}{4} = \tfrac{37}{16}$$

${}^{1}_{p}C[1..] = 1$ realisirt $= -\frac{1}{4}$, daher der gesuchte Coefficient $= \frac{1}{4}(\frac{37}{16}\cdot 7 + (-\frac{1}{4})(-3) - 2) = \frac{239}{64}$ wie oben.

Der vierte Coefficient desselben Quotienten ist:

$$\frac{1}{4}[{}^{4}_{p}C[1..]\cdot 7 + {}^{3}_{p}C[1..](-3) + {}^{2}_{p}C[1..](-2) + {}^{1}_{p}C[1..]\cdot 5 + (-1)]$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} {}^{4}_{p}C[1..] = 1111 \text{ realisirt} &= \frac{1}{256} \\ 3.(112) \quad \text{"} \quad &= \frac{27}{64} \\ 2.(13) \quad \text{"} \quad &= \frac{1}{4} \\ 22 \quad \text{"} \quad &= \frac{81}{16} \\ 4 \quad \text{"} \quad &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

Die Summe dieser realisirten Formen ist $= \frac{1149}{256}$. Ferner ist:

$$\begin{aligned} {}^{3}_{p}C[1..] = 111 \text{ realisirt} &= -\frac{1}{64} \\ 2.(12) \quad \text{"} \quad &= -\frac{9}{8} \\ 3 \quad \text{"} \quad &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

wovon die Summe $= -\frac{105}{64}$ ist.

Folglich ist:

$\overset{4}{A} = \frac{1}{4}[\frac{1149}{256}\cdot 7 + (-\frac{105}{64})(-3) + \frac{37}{16}\cdot(-2) + (-\frac{1}{4})\cdot 5 + (-1)] = \frac{7543}{1024}$, wie wir oben fanden.

§. 61.

Bestimmung des Restes.

Wenn sowohl der Divisor, als der Dividend, oder auch nur der erstere unbestimmt fortläuft, so wird der Quotient gleichfalls eine unbestimmte Anzahl von Gliedern bekommen, denn der independente Ausdruck für den hten Coefficienten:

$$\frac{1}{a}({}^{h}_{p}C[1..]\cdot\frac{0}{b} + {}^{h-1}_{p}C[1..]\cdot\frac{1}{b} \dots + {}^{h-r}_{p}C[1..]\cdot\frac{r}{b} \dots \frac{h}{b})$$

ist in beiden Fällen darstellbar, wenn auch, falls der Dividend abbricht, die letzten Glieder desselben, wegen der zu 0 gewordenen Coefficienten b .. selbst annihilirt werden. Ist aber der Divisor in Hinsicht auf die Anzahl seiner Glieder begrenzt, so

wird der Quotient nur so viel Glieder haben können, als er, denn alsdann ist höchstens, wenn der Divisor k Glieder hat,

$$\frac{1}{a}\left({}^{k}_{p}C[1..k].b + {}^{k-1}_{p}C[1..k].\overset{1}{b}\ldots\overset{k}{b}\right)$$

darstellbar, wenn dabei die recurrirende Beziehung von ${}^{h}_{p}C[1..]$ statt finden soll, wie es erfoderlich ist.

Bricht man nun den Quotienten, wenn er unbegrenzt fortläuft, willkührlich ab, oder hat man, wenn er durch die Natur des vorgegebenen Falles schon von selbst abbrechen sollte, alle möglichen Glieder berechnet, so ist erfoderlich, daß man den Rest, welcher dem Quotienten noch hinzugefügt werden muß, noch darstelle.

Laufen nun erstlich Dividend und Divisor unbestimmt fort, und hat man, wie es zur Bestimmung des Restes erfoderlich ist, die successiven Glieder des Quotienten bis zu einem bestimmten Grade schon berechnet, d. h. in Zeichen, hat man:

$$\frac{bx^{a} + \overset{1}{b}x^{a+\delta}\ldots + \overset{h}{b}x^{a+h\delta}\ldots}{ax^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta}\ldots + \overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta}\ldots} = \frac{b}{a}x^{a-\alpha} + \overset{1}{K}x^{a-\alpha+\delta}\ldots + \overset{h}{K}x^{a-\alpha+h\delta}\ldots$$

so ist der Rest, R, =

$$\left(bx^{a} + \overset{1}{b}x^{a+\delta}\ldots\overset{h}{b}x^{a+h\delta}\ldots\right) - \left(\frac{b}{a}x^{a-\alpha}\ldots\overset{h}{K}x^{a-\alpha+h\delta}\right)\left(ax^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta}\ldots\overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta}\ldots\right)$$

Das Product ist:

$$= bx^{\alpha} + \ldots + \left(\overset{h}{K}a + \overset{h-1}{K}\overset{1}{a}\ldots\overset{h-r}{K}\overset{r}{a}\ldots\overset{1}{K}\overset{r-1}{a} + \frac{b}{a}.\overset{r}{a}\right)x^{\alpha+h\delta}\ldots$$

$$+ \left(\overset{h}{K}a + \overset{h-1}{K}\overset{n+1}{a}\ldots + \overset{h-k}{K}\overset{n+k}{a}\ldots + \overset{1}{K}\overset{n+h-1}{a} + \frac{b}{a}.\overset{n+h}{a}\right)x^{\alpha+(h+n)\delta}\ldots$$

Da dieses Product vom Dividend abgezogen werden soll, und die ersten h Glieder desselben mit den ersten h Gliedern des Dividends schon identisch sind, sich daher bei der Subtraction aufheben, so folgt, daß das erste Glied des gesuchten Restes der h + 1ten Coefficient des Dividends ist, wovon das eben so hohe Glied des Productes abgezogen ist, und allgemein, daß man in der Differenz zwischen dem h+nten Coefficienten des Dividends und des gleich hohen Gliedes des Products den nten Coefficienten des Restes habe, so, daß also allgemein dieses nte Glied

$$= \left[\overset{h+n}{b} - \left(\overset{h}{K}\overset{n}{a} + \overset{h-1}{K}\overset{n+1}{a}\ldots\overset{h-k}{K}\overset{n+k}{a}\ldots + \overset{1}{K}\overset{h+h-1}{a} + \frac{b}{a}.\overset{n+h}{a}.\right)\right].x^{\alpha+(h+n)\delta}$$

gefunden wird.

Ist aber der Divisor in Absicht seiner Glieder begrenzt, und ist der höchste Coefficient desselben $= \overset{h}{a}$, so wird der Coefficient des nten Gliedes des Restes:

$$= \overset{h+n}{b} - (\overset{h}{K}{}^{n}_{a} + \overset{h-1}{K}{}^{n+1}_{a} \dots \overset{h-k}{K}{}^{n+k}_{a} \dots \overset{n}{K}{}^{h}_{a})$$

weil diejenigen Glieder des Ausdrucks, welche höhere Coefficienten, als den hten enthielten, annihilirt sind.

Da in diesem Falle, wo der Divisor h Glieder hat, der Quotient höchstens eine gleiche Anzahl haben kann, so wird das Product aus dem Divisor in den Quotienten 2h Glieder haben und daher dem Reste dieselbe Anzahl zukommen.

Ist nun endlich auch der Dividend in Absicht auf die Anzahl seiner Glieder beschränkt, so wird in dem independenten Ausdrucke der Subtrahend, $\overset{h+n}{b}$, falls $h+n$ größer ist, als die gegebene Anzahl der Glieder des Dividends, wegfallen und man hat alsdann nur nöthig, den Ausdruck:

$$\overset{h}{K}{}^{n}_{a} + \overset{h-1}{K}{}^{n+1}_{a} \dots \overset{n}{K}{}^{h}_{a}$$

mit entgegengesetztem Zeichen zu setzen. Der Rest hat auch hier eben so viel Glieder, als der Divisor.

Wir fanden z. B.

$$\frac{7 - 3x - 2x^2 + 5x^3 - x^4}{4 + x - 9x^2 + 2x^3 + 5x^4} = \tfrac{7}{4} - \tfrac{19}{16}x + \tfrac{239}{64}x^2 - \tfrac{872}{256}x^3 + \tfrac{7543}{1024}x^4$$

der Rest wird aus 4 Gliedern bestehen, welche successiv in x^5, x^6, x^7, x^8 multiplicirt sind. Verlangt man z. B. den Coefficienten, welcher zu x^6 gehört, so ist er:

$$-\left[(\tfrac{7543}{1024})(-9) + (-\tfrac{872}{256}).2 + \tfrac{239}{64}.5\right] = \tfrac{55743}{1024}$$

Fünfter Abschnitt.

Potenziirung zusammengesetzter Formen. Polynomischer und binomischer Lehrsatz für ganze positive Exponenten.

---

§. 62.

Independente Bestimmung der Glieder eines auf eine Potenz erhobenen Polynomii.

Gedenkt man sich die Reihen, deren Product wir im vorhergehenden Abschnitte betrachtet haben, alle identisch, so entstehet eine Potenz mit ganzem positiven Exponent:

$$\left(\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots \overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta} \ldots\right)^{k}$$

Wir fanden allgemein das hte Glied des Products, oder dasjenige, welches $x^{k\alpha+h\delta}$ enthält, $= {}^{h}\overset{k}{V}[0..].x^{k\alpha+h\delta}$, es ist also klar, daß sich dieser Coefficient, weil nun alle Elementenreihen, woraus er gebildet ist, identisch sind, in ${}^{h}_{p}\overset{k}{C}[0..]$ verwandle, so, daß also:

$$\left(\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta} \ldots\right)^{k} = {}^{0}_{p}\overset{k}{C}[0..].x^{k\alpha} + {}^{1}_{p}\overset{k}{C}[0..].x^{k\alpha+\delta} \ldots + {}^{h}_{p}\overset{k}{C}[0..]x^{k\alpha+h\delta} \ldots$$

Ist $\alpha = 0$, $\delta = 1$, so hat man also:

$$\left(\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x^{1} + \overset{2}{a}x^{2} \ldots + \overset{h}{a}x^{h} \ldots\right)^{k} = {}^{0}_{p}\overset{k}{C}[0..].x^{0} + {}^{1}_{p}\overset{k}{C}[0..]x^{1} \ldots + {}^{h}_{p}\overset{k}{C}[0..]x^{h} \ldots$$

Für $\alpha = 1$, $\delta = 1$ ist endlich:

$$(\overset{0}{a}x + \overset{1}{a}x^{2} \ldots + \overset{h}{a}x^{h+1} \ldots)^k = {}^{0}_{p}\overset{k}{C}[0\,..].x^k + {}^{1}_{p}\overset{k}{C}[0\,..]x^{k+1} \ldots {}^{h}_{p}\overset{k}{C}[0\,..]x^{k+h} \ldots$$

oder, wenn der Rang eines jeden Coefficienten der Basis um eine Einheit erhöhet wird, so findet man, wie bei der Multiplication, (§. 54.)

$$[\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^{2} \ldots \overset{h}{a}x^{h} \ldots]^k = {}^{k}_{p}\overset{k}{C}[1\,..]x^k + {}^{k+1}_{p}\overset{k}{C}[1\,..]x^{k+1} \ldots + {}^{k+h}_{p}\overset{k}{C}[1\,..]x^{k+h} \ldots$$

Das höchste Glied der Potenz findet sich hier, wie bei der Multiplication. Läuft die Basis unbegrenzt fort, so ist dasselbe auch mit der Potenz der Fall, bricht sie aber bei dem Gliede ab, welches $x^{\alpha+h\delta}$ enthält, so ist das höchste Glied dasjenige, welches $x^{k\alpha+kh\delta}$ in sich begreift. Der erste Coefficient ist ${}^{0}_{p}\overset{k}{C}[0\,..] = 0^k$ und weil die Elemente Factoren sind, eine Potenz $= \overset{0}{a}{}^{k}$.

Wir sind also im Besitze einer independenten Regel zur Berechnung jedes Coefficienten einer gewissen Potenz eines Polynomii. Hat man z. B. die Potenz $(x - 3x^2 + 7x^3 - x^4)^3$ zu berechnen, und davon das Glied zu entwickeln, welches x^5 in sich schließt, so ist dieses $= {}^{5}_{p}\overset{3}{C}[1\,..4].x^5$. Nun ist

$${}^{5}_{p}\overset{3}{C}[1\,..4] = 3.(113) \text{ realisirt} = 21$$
$$3.(122) \quad " \quad " = 27$$

also der Coefficient des gefoderten Gliedes ist $= 21 + 27 = 48$.

Verlangte man das Glied, welches x^9 enthält, so ist der Coefficient $=$

$${}^{9}_{p}\overset{3}{C}[1\,..4] = 3.(144) \text{ realisirt} = 3$$
$$6.(234) \quad " \quad " = 126$$
$$333 \quad " \quad " = 336$$

und folglich ist das gesuchte Glied $= 465x^9$.

Würde ferner von der Potenz

$$(3 - 2x + 7x^2 + 4x^3 - 5x^4)^4$$

dasjenige Glied verlangt, welches x^8 enthält, so ist der Coefficient $=$

${}^{8}_{p}\overset{4}{C}[0..4] =$	6.(0044)	realisirt $=$	1350
	24.(0134)	" " $=$	2880
	12.(0224)	" " $=$	$-$ 8820
	12.(0233)	" " $=$	4032
	12.(1124)	" " $=$	1680
	6.(1133)	" " $=$	384
	12.(1223)	" " $=$	$-$ 4704
	(2222)	" " $=$	16

Die Summe der negativen Partialproducte ist $= 13524$, die der positiven $= 10342$, also ist das verlangte Glied $= - 3182\,x^8$.

§. 63.

Recurrirende Bestimmung.

Eine recurrirende Regel zur Bestimmung der Glieder eines zu einer Potenz erhobenen Polynomii, d. h. eine solche, vermöge deren man aus früheren Coefficienten der entwickelten Potenz einen nachfolgenden eben derselben berechnen kann, bietet die ursprüngliche Betrachtung nicht unmittelbar dar. Es kömmt hier also darauf an, den Uebergang von der recurrirenden Bestimmung zur independenten zu machen. Der independente Ausdruck des hten Gliedes der entwickelten Potenz: $[\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots \overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta} \ldots]^{k}$ ist ${}^{h}_{p}\overset{k}{C}[0..]$, wobei sich die Elemente 0, 1 .. auf die bekannten Coefficienten $\overset{0}{a}$, $\overset{1}{a}$ .. beziehen. Können wir also eine Regel ausfindig machen, vermöge deren man aus den successiven Formen-Inbegriffen: ${}^{0}_{p}\overset{k}{C}[0..]$, ${}^{1}_{p}\overset{k}{C}[0..] \ldots {}^{h-1}_{p}\overset{k}{C}[0..]$ den nachfolgenden ${}^{h}_{p}\overset{k}{C}[0..]$ abzuleiten im Stande ist, so haben wir das gefunden, was wir suchten, denn jene Formen-Inbegriffe sind die successiven Polynomialcoefficienten.

Wir fanden (§. 41. S. 123.) die allgemeine Recursionsformel:

$$ {}^{h}_{p}\overset{k}{C}[p..] = {}^{h-p}_{p}\overset{k-1}{C}[p..].p + \ldots + {}^{h-(p+r)}_{p}\overset{k-1}{C}[p..].(p+r) \ldots $$
$$ + {}^{(k-1)p}_{p}\overset{k-1}{C}[p..](h-(k-1)p) $$

Setzt man darin $p = o$, so wird sie:

$$ {}^{h}_{p}\overset{k}{C}[o..] = {}^{h}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].o + {}^{h-1}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].1 \ldots + {}^{h-r}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].r \ldots {}^{o}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].h $$

Diese Beziehung, welche allerdings eine Recursionsformel unter den Polynomialcoefficienten ist, hat jedoch nicht die Form, welche wir suchen, denn sie leitet aus den successiven h Coefficienten der k-1ten Potenz den hten der kten Potenz ab, während diejenige, welche hier verlangt wird, aus den h ersten Coefficienten der k-1sten Potenz den h+1sten eben derselben Potenz deriviren soll. Eine solche Formel kann aber aus obiger Beziehung hervorgehen, sobald durch irgend ein Mittel bewirkt werden kann, daß ${}^{h}_{p}\overset{k}{C}[o..] = o$ wird, denn alsdann hat man:

$$ o = {}^{h}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].o + {}^{h-1}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].1 \ldots {}^{h-r}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].r \ldots {}^{o}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].h $$

folglich:

$$ {}^{h}_{p}\overset{k-1}{C}[o..] = - \frac{{}^{h-1}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].1 + {}^{h-2}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].2 \ldots {}^{o}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].h}{o} $$

eine Recursionsformel von der gefoderten Gestalt.

Um aber ${}^{h}_{p}\overset{k}{C}[o..]$ zu annihiliren, wollen wir die Voraussetzung machen, daß jeder Theil der Recursionsformel mit einem eignen Factor, d. h. mit einem solchen multiplicirt werde, welcher von der Stellenzahl seines Gliedes abhängt, oder eine Function dieser Zahl ist. Um diese Annahme so einfach als möglich zu machen, mag die Function die einfachste seyn, welche man darstellen kann, d. h. eine algebraische rationale ganze Function, und zwar vom ersten Grade, so, daß also diese für das rte Glied $b+rd$, und daher für das ote b, für das erste $b+d$ ist, u. s. w.

Die Recursionsscale ist also, nachdem diese Annahme realisirt ist:

$$ b.{}^{h}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].o + (b+d).{}^{h-1}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].1 \ldots + (b+rd){}^{h-r}_{p}\overset{k-1}{C}[o..]r.. + (b+hd).{}^{o}\overset{k-1}{C}[o..].h $$

Um jetzt zu erkennen, wie durch diese Annahme die Recursionsscale, oder das ihr gleiche ${}^{h}_{p}\overset{k}{C}[o..]$ verändert worden ist, wollen wir aus ${}^{h}_{p}\overset{k}{C}[o..]$ irgend eine Form M, deren Permutationszahl = N ist, hervorheben, um zu sehen, was diese für eine Veränderung erlitten hat. Zuerst ist erfoderlich zu wissen, aus welchen Gliedern der Recursionsscale die mit ihrer Permutationszahl N versehene Form M herrührt.

Die Recursionsformel:

$$ {}^{h}_{p}\overset{k}{C}[o..] = {}^{h}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].o + {}^{h-1}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].1 \ldots {}^{h-r}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].r \ldots {}^{o}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].h $$

ist aus:

$$ {}^{h}\overset{k}{V}[o..] = {}^{h}\overset{k-1}{V}[o..].o + {}^{h-1}\overset{k-1}{V}[o..].1 \ldots + {}^{h-r}\overset{k-1}{V}[o..].r \ldots + {}^{o}\overset{k-1}{V}[o..].h $$

entstanden. Jede Form aus ${}^{h}\overset{k}{V}[o..]$ erscheint in allen ihren Versetzungen, hat also nach und nach jedes ihrer Elemente in der letzten Stelle (§. 10. S. 22.) und ist daher aus allen denjenigen Gliedern der Recursion entstanden, deren Stellenzahlen mit den Rangzahlen ihrer Elemente übereinkommen. Die Recursionsformel für ${}^{h}_{p}\overset{k}{C}[o..]$ ist ganz dieselbe geblieben, man hat nur alle die dem Inhalte nach gleichen Formen zusammengefaßt, und ihm die Zahl als Factor beigegeben, welche ihre Menge ausdrückte. Jede einzelne Form aus ${}^{h}_{p}\overset{k}{C}[o..]$ wird also aus den Gliedern der Recursionsscale entstanden seyn, deren Stellenzahlen mit den Rangzahlen ihrer Elemente einerlei sind.

Nimmt man also aus ${}^{h}_{p}\overset{k}{C}[o..]$ irgend eine mit ihrer Versetzungszahl, N, multiplicirte Combinationsform hervor, so werden alle jene Glieder der Recursionsscale dieselbe Form mit einer gewissen Permutationszahl enthalten, und die Summe aller dieser Permutationszahlen wird = N seyn.

Um also zu erfahren, wie durch obige Annahme irgend eine beliebige, mit ihrer Versetzungszahl, N, multiplicirte Combinationsform, M, verändert worden ist, nehmen wir an, daß sie allgemein ein $x$tes Element enthalte, so, daß also ein Theil

von N.M aus dem rten-Gliede der Recursion herrührt. Die Permutationszahl, welche die Form im rten Gliede besitzt, kann leicht berechnet werden, wenn man nur weiß, wie viel mal sich die Elemente der Form ohne das rte versetzen lassen. Ist dieses rte Element noch in der Form enthalten, wenn permutirt wird, so ist die Versetzungszahl = N, und diese ist = $\frac{1..k}{1..\varphi.1,.p.1..q.1..}$, wenn das rte Element φ, die übrigen p, q mal u. s. w. vorkommen; nimmt man das Element r weg, so hat man noch k-1 Elemente, unter welchen, indem alles übrige bleibt, das rte Element φ-1 mal vorkommt, und die Permutationszahl ist alsdann $\frac{1...(k-1)}{1..(\varphi-1).1..p....} = \frac{N\varphi}{k}$ Aus dem rten Gliede der Recursionsscale erhält also N.M den Theil $\frac{\varphi}{k}$ N.M und da dieses Glied durch die Hypothese noch den Factor (b + rd) annimmt, so folgt, daß das rte Glied in allem

$$(b + rd)\ \frac{\varphi}{k}.\ N.M = \frac{b\varphi + r\varphi d}{k}.NM$$

zu dem beigetragen habe, worin die mit ihrer Permutationsform N versehene Form M durch obige Annahme verändert worden ist. Setzt man also nun für r (folglich auch für φ) alle Werthe, welche es annehmen kann, in die Formel und addirt alle diese Theile zusammen, so wird man dasjenige dargestellt haben, wozu N.M durch die Annahme verändert worden ist. Will man aber die Größen, welche entstehen, wenn man in $\frac{b\varphi + r.\varphi d}{k}$ N.M für φ und r alle Werthe setzt, addiren, so wird dieses ein Bruch werden, welcher den allen Theilen gemeinschaftlichen Divisor k und Factor N M enthält, während der Zähler aus zwei Theilen bestehet, wovon der erste die Summe aller φ mit b multiplicirt, der zweite die Summe aller r.φ mit d multiplicirt enthält. Nun kann man aber die einzelnen Werthe von r und φ nicht angeben, weil man nicht weiß, welche Elemente die beliebig angenommene Form M enthält, allein die Summe von φ und rφ ist bekannt. Denn wenn man für φ, die Anzahl der rten Elemente in der Form M, alle Werthe setzt, die es annehmen kann, d. h. sich alle die Zahlen gedenkt, welche anzeigen, wie viel mal jedes Element der Form M in derselben enthalten ist, und diese Zahlen zusammenaddirt, so wird man die Anzahl aller in M enthaltenen Elemente, oder den Klassen-Exponenten, k, erhalten. Das Product r.φ zeigt die Summe an, welche blos die rten Elemente in

der Form M darbieten, setzt man also für r und φ alle Werthe, und addirt sie zusammen, so wird man die Summe erhalten, welcher die Form M angehört, und welche $= h$ ist. Setzt man daher in dem Ausdrucke $\frac{b\varphi + r\varphi.d}{k}.N.M$ für r und φ alle Werthe, so entstehet $\frac{b.k + hd}{k}.N.M$, und dieses zeigt an, wie N M durch obige Annahme verändert worden ist. Eine jede mit ihrer Permutationszahl versehene Form aus ${}^{h}_{p}\overset{k}{C}[o..]$ nimmt daher durch die Annahme, daß die successiven Glieder der Recursionsscale nach und nach mit b, $b + d$, $b + 2d \ldots b + rd$ multiplicirt werden, den Factor $\frac{bk + hd}{k}$ an, sondert man diesen gemeinschaftlichen Factor ab, um ihn dem Inbegriffe aller dieser Formen, ${}^{h}_{p}\overset{k}{C}[o..]$, wieder vorzusetzen, so hat man in dem Ausdrucke $\frac{bk + hd}{k}.{}^{h}_{p}\overset{k}{C}[o..]$ dasjenige, wozu der anfängliche Ausdruck durch die gemachte Annahme verändert ist, so, daß man allgemein findet:

$$\frac{bk + hd}{k}.{}^{h}_{p}\overset{k}{C}[o..] = b.{}^{h}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].o + (b+d).{}^{h-1}_{p}\overset{k-1}{C}[o..]1 \ldots$$

$$(b+rd)\,{}^{h-r}_{p}\overset{k-1}{C}[o..]r \ldots (b+hd).{}^{o}\overset{k-1}{C}[o..]h$$

Jetzt kehrt die obige Frage wieder, wie ${}^{h}_{p}\overset{k}{C}[o..]$ annihilirt werden könne, oder wie man b und d einzurichten habe, damit $bk + hd$ zu o wird. Dieses wird aber offenbar der Fall seyn, wenn $b = -h$, $d = k$ ist, alsdann hat man

$$o = -h.{}^{h}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].o + (-h+k)\,{}^{h-1}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].1 \ldots$$

$$(-h+rk).\,{}^{h-r}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].r \ldots (-h + hk)\,{}^{o}\overset{k-1}{C}[o..]h$$

also:

$${}^{h}_{p}\overset{k-1}{C}[o..] = \frac{(-h+k)\,{}^{h-1}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].1 \ldots + (-h+rk)\,{}^{h-r}_{p}\overset{k-1}{C}[o..].r \ldots + (-h+hk)\,{}^{o}\overset{k-1}{C}[o..]h}{h.o}$$

eine Recursionsformel von der gefoderten Gestalt und Eigenschaft; die Voraussetzung,

welche wir zur Annihilirung des Ausdrucks $\overset{h}{\underset{p}{}}\overset{k}{C}[o..]$ machten, wird daher durch diesen Ausgang der Untersuchung gerechtfertiget.

Wenn sich also die Elemente o, 1 ... auf die Größen $a, \overset{1}{a}, \overset{2}{a} ...$, beziehen, und diese als Factoren, die Formen aber als Theile gedacht werden, wie es bei den Polynomialcoefficienten, $\overset{o}{\underset{p}{}}\overset{k}{C}[o..]$, $\overset{1}{\underset{p}{}}\overset{k}{C}[o..]$. u. s. w. der Fall ist, so hat man für die hte dieser Größen die recurrirende Beziehung:

$$\overset{h}{\underset{p}{}}\overset{k}{C}[o..] = \frac{(k+1-h).\overset{h-1}{\underset{p}{}}\overset{k}{C}[o..].\overset{1}{a}...+(rk+r-h)\overset{h-r}{\underset{p}{}}\overset{k}{C}[o..].\overset{r}{a}...+kh.\overset{o}{}\overset{k}{C}[o..].\overset{h}{a}}{a.h}$$

welche Formel aus der obigen entstehet, wenn man für k den Werth k+1 und für die nachzusetzenden Elemente o, 1 .. die Größen $a, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}$ .. substituirt.

Wenn man daher eine allgemein ausgedrückte Potenz folgendermaaßen fingirt:

$$[ax^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} ... \overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta} ...]^k = \overset{o}{A}x^{k\alpha} + \overset{1}{A}x^{k\alpha+\delta} ... + \overset{h}{A}x^{k\alpha+h\delta} ...$$

so hat man unter den Größen $\overset{1}{A}, \overset{2}{A}$ .. folgende Recursionsformel:

$$\overset{h}{A} = \frac{(k+1-h).\overset{h-1}{A}\overset{1}{a}...+(rk+r-h).\overset{h-r}{A}\overset{r}{a}...+hk.\overset{o}{A}.\overset{h}{a}}{a.h}$$

Das Anfangsglied ist, wie solches auch bei jeder Recursion gefodert wird, schon bekannt $= a^k x^{k\alpha}$.

Diese Recursionsformel gilt für jede Form der Potenz, denn man mag α und δ annehmen, wie man will, diese Größen haben auf die Recursion keinen Einfluß.

Ist $\alpha = \delta = 1$, also die Potenz:

$$[ax^1 + \overset{1}{a}x^2 ... \overset{h}{a}x^{h+1} ...]^k$$

und man will die Coefficienten so bezeichnen, daß ihre Indices mit dem Exponenten von x übereinkommen, so bleiben alle Coefficienten der Entwickelung: $\overset{o}{\underset{p}{}}\overset{k}{C}[o..]$, $\overset{1}{\underset{p}{}}\overset{k}{C}[o..]$, nur werden, da jetzt jedes Element einen um 1 höheren Rang annimmt,

die Summen-Exponenten um k Einheiten größer werden, und es verwandelt sich der

hte Coefficient $\overset{k}{{}^{h}_{p}C}[o\,..]$ in $\overset{k}{{}^{k+h}_{p}C}[1\,..]$ und

$$\overset{k}{{}^{h}_{p}C}[o..] = \frac{(k+1-h)\,\overset{k}{{}^{h-1}_{p}C}[o..].\overset{1}{a} + \ldots + (rk+r-h).\,\overset{k}{{}^{h-r}_{p}C}[o..]\overset{r}{a} \ldots + kh.\,\overset{k}{{}^{o}C}[o..]\overset{h}{a}}{a.h}$$

in:

$$\overset{k}{{}^{h+k}_{p}C}[1..] = \frac{(k+1-h).\,\overset{k}{{}^{k+h-1}_{p}C}[1..].\overset{2}{a} \ldots + (rk+r-h).\,\overset{k}{{}^{k+h-r}_{p}C}[1..].\overset{r+1}{a} \ldots + kh.\,\overset{k}{{}^{k}C}[1..]\overset{k+1}{a}}{\overset{1}{a}.h}$$

und man hat daher nach dieser Veränderung der Coefficienten der Basis, wenn:

$$[\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots \overset{h}{a}x^h \ldots]^k = \overset{o}{A}x^k + \overset{1}{A}x^{k+1} \ldots \overset{h}{A}x^{k+h}$$

ist, wobei $\overset{o}{A} = \overset{k}{{}^{k}_{p}C}[1..] = 1^k = \overset{1}{a}{}^k$ gefunden wird, die Recursionsformel:

$$\overset{h}{A} = \frac{(k+1-h).\overset{h-1}{A}\overset{2}{a} \ldots + (rk+r-h)\overset{h-r}{A}\overset{r+1}{a} \ldots + hk.\overset{o}{A}\overset{h+1}{a}}{\overset{1}{a}.h}$$

Ist die Anzahl der Glieder der Basis begrenzt, so fallen in der Recursion alle diejenigen Glieder weg, worin höhere Coefficienten der Basis vorkommen, als wirklich vorhanden sind, weil man sich diese = o gesetzt vorstellen kann.

Z. B. Der erste Coefficient der Potenz

$$(x - 3x^2 + 7x^3 - x^4)^3$$

wobei $\overset{1}{a} = 1$, $\overset{2}{a} = -3$, $\overset{3}{a} = 7$, $\overset{4}{a} = -1$ und $\overset{o}{A} = 1$

ist, wird gefunden:

$$\overset{1}{A} = \frac{3 \cdot \overset{o}{A} \cdot (-3)}{1} = -9$$

Ferner:

$$\overset{2}{A} = \frac{2 . \overset{1}{A} . (-3) + 6\,\overset{o}{A} . 7}{2} = \frac{54 + 42}{2} = 48$$

$$\overset{3}{A} = \frac{1.\overset{2}{A}.(-3) + 5\overset{1}{A}.7 + 9.\overset{0}{A}(-1)}{3} = \frac{-144-315-9}{3} = -156$$

$$\overset{4}{A} = \frac{0.\overset{3}{A}(-3) + 4.\overset{2}{A}.7 + 8.\overset{1}{A}(-1)}{4} = 336 + 18 = 354$$

u. s. f.

Bei dieser Berechnung der Glieder kann man, so wie bei allen recurrirenden Bestimmungen, einen einfachen Mechanismus anwenden, wie dieses aus der Recursionsscale leicht einzusehen ist.

§. 64.

Binomischer Lehrsatz für ganze Exponenten. Binomialcoefficienten.

Der binomische Lehrsatz stellt die Entwickelung der Potenz einer zweitheiligen Größe, $(1 + x)$, dar. Daß dieses nur ein besonderer Fall des polynomischen Lehrsatzes ist, leuchtet sogleich ein, denn $1 + x$ entstehet aus dem Polynom $\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \dots \overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta} \dots$, wenn man $\overset{0}{a} = 1$, $\alpha = 0$ und $\delta = 1$, $\overset{1}{a} = 1$, so wie alle folgenden Coefficienten $\overset{2}{a}, \overset{3}{a} \dots = 0$ setzt. Will man also die kte Potenz des Binomii $1 + x$ berechnen, so setze man in dem allgemeinen Ausdrucke für den hten Coefficienten der Entwickelung eines Polynomii für $\overset{0}{a}$, α, δ u. s. w. obige Werthe, so wird man den hten Coefficienten von $(1 + x)^k$ haben.

Was zuerst die Form der Entwickelung betrifft, so ist sie

$$1 + \overset{1}{A}x^1 + \overset{2}{A}x^2 \dots$$

welches entstehet, wenn man in

$$(\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \dots \overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta} \dots)^k = \overset{0}{A}x^{k\alpha} + \overset{1}{A}x^{k\alpha+\delta} \dots + \overset{h}{A}x^{k\alpha+h\delta} \dots$$

die angezeigten Werthe setzt.

Nimmt man nun dieselben Substitutionen mit der allgemeinen Recursionsformel vor, so verwandelt sie sich in:

$$\overset{h}{A} = \frac{(k+1-h)\overset{h-1}{A}\overset{1}{a}}{\overset{0}{a}.h} = \frac{(k+1-h)}{h}.\overset{h-1}{A}$$

weil alle folgenden Glieder mit den = o gesetzten Coefficienten $\overset{2}{a}, \overset{3}{a}$ .. behaftet sind.

Wir haben also zur Berechnung der Coefficienten binomischer Potenzen eine Recursionsformel, welche lehrt, wie man aus dem nächstvorhergehenden den unmittelbar nachfolgenden bestimmen könne.

Z. B. Es werde $(1+x)^6$ verlangt, so ist, da immer $\overset{0}{A} = 1$ ist:

$$\overset{1}{A} = [\tfrac{7-1}{1}].\overset{0}{A} = 6$$

$$\overset{2}{A} = [\tfrac{7-2}{2}].\overset{1}{A} = \tfrac{5}{2}.6 = 15$$

$$\overset{3}{A} = [\tfrac{7-3}{3}]\overset{2}{A} = \tfrac{4}{3}.15 = 20$$

$$\overset{4}{A} = [\tfrac{7-4}{4}]\overset{3}{A} = \tfrac{3}{4}.20 = 15$$

u. s. w.

Ist $h = k+1$, so ist

$$\overset{k+1}{A} = \frac{k+1-(k+1)}{k+1}\overset{k}{A} = 0$$

und folglich werden auch alle folgenden = o, weil sie aus der Multiplication mit den vorhergehenden entstehen, die kte Potenz von $1+x$ hat also nur k Glieder nach dem anfänglichen.

Durch diese Betrachtung sind wir auf eine Recursionsformel gekommen, vermöge welcher es leicht ist, die successiven Coefficienten eines zu einer Potenz erhobenen Binomii abzuleiten. Wird eine independente Bestimmung des Darzustellenden verlangt, so muß zuerst bemerkt werden, daß allgemein der hte Coefficient von

$(1+x)^k$ aus k und h zusammengesetzt seyn müsse, daß man ihn also durch ${}^{k}\overset{h}{A}$ beziehen könne. Da man nun für diese Größen die Recursion

$$ {}^{k}\overset{h}{A} = \frac{k-h+1}{h} \cdot {}^{k}\overset{h-1}{A} $$

hat, und auf dieselbe Weise auch die Facultäten mit der Basis -1 recurriren würden:

$$ {}^{k}\overset{h}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = {}^{k}\overset{h-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} \cdot (k+1-h), $$

wenn nicht der Divisor h in obigem Ausdrucke wäre, so siehet man leicht, daß diesem Umstande bald abgeholfen werden könne, wenn man nur auf beiden Seiten der letzten Gleichung mit p^{-h} multiplicirt, denn alsdann ist:

$$ p^{-h} \cdot {}^{k}\overset{h}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = p^{-(h-1)} \cdot {}^{k}\overset{h-1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} \cdot \frac{k+1-h}{h}, $$

eine Recursionsformel, welche mit der für ${}^{k}\overset{h}{A}$ identisch ist, so, daß man also

$$ {}^{k}\overset{h}{A} = p^{-(h+g)} \cdot {}^{k+n}\overset{h+g}{\mathfrak{F}}{}^{-1} $$

findet.

Für $h = 0$ ist ${}^{k}\overset{0}{A} = 1$ und daher:

$$ 1 = p^{-g} \cdot {}^{k+n}\overset{g}{\mathfrak{F}}{}^{-1} \quad \text{oder} \quad p^{g} = {}^{g}\overset{g}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = {}^{k+n}\overset{g}{\mathfrak{F}}{}^{-1} $$

Da hier die Basen der beiden Facultäten verschieden seyn müssen, so folgt, daß bei der Gleichheit derselben die Exponenten $= 0$ seyn müssen. Um auch die Constante n zu bestimmen, setzen wir in dem Ausdrucke:

$$ {}^{k}\overset{h}{A} = p^{-h} \cdot {}^{k+n}\overset{h}{\mathfrak{F}}{}^{-1} $$

für h den Werth 1, alsdann wird ${}^{k}\overset{1}{A} = k$, denn es ist ${}^{k}\overset{1}{A} = k \cdot {}^{k}\overset{0}{A} = k$. folglich hat man

$$ k = {}^{k+n}\overset{1}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = k + n. $$

also ist auch $n = 0$, und daher:

$$ {}^{k}\overset{h}{A} = \overset{-h}{p} \cdot {}^{k}\overset{h}{\mathfrak{F}}{}^{-1} = \frac{k(k-1)\dots(k-(h-1))}{h.(h-1)\dots 1} $$

Man hat daher allgemein:

$$ (1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{1.2}x^2 \dots + \frac{k(k-1)..(k-(h-1))}{1.2\dots h}x^h \dots x^k $$

Diese durch die Permutationszahl ihres Grades dividirten Facultäten nennt man dieses Satzes wegen **Binomialcoefficienten**, und bezeichnet sie sehr schicklich durch das deutsche $\mathfrak{B}$, so, daß allgemein ${}^{k}\overset{h}{\mathfrak{B}} = \frac{k(k-1)\dots(k-(k-1))}{h(h-1)\dots 1}$ der hte Binomialcoefficient der kten Potenz genannt wird.

Nach dieser Bezeichnung ist also:

$$ (1+x)^k = 1 + {}^{k}\overset{1}{\mathfrak{B}}x + {}^{k}\overset{2}{\mathfrak{B}}x^2 \dots + {}^{k}\overset{h}{\mathfrak{B}}x^h \dots x^k $$

Die Facultäten gehören zu den merkwürdigsten Ausdrücken der Analysis, und ihre Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen sind in hohem Grade merkwürdig. Man kömmt bei unzähligen analytischen Untersuchungen auf diese Zahlen, und die genaue Kenntniß ihrer Natur ist daher dem Analytiker sehr wichtig.

Wir haben schon oben gesehen, daß die binomische Reihe, sobald nämlich der Exponent, k, eine ganze positive Zahl ist, mit dem kten Gliede nach dem anfänglichen abbricht. Diese Behauptung rechtfertiget sich auch durch die independente Bestimmung, denn es ist

$$ {}^{k}\overset{k+1}{\mathfrak{B}} = \frac{k(k-1)\dots(k-k)}{k(k-1)\dots 1} = 0 $$

und alle folgenden Coefficienten werden gleichfalls den Factor $k-k=0$ in sich schließen.

Man hat:

$$ {}^{k}\overset{k-h}{\mathfrak{B}} = \frac{k(k-1)\dots(k-(k-h-1)}{(k-h)(k-h-1)\dots 1} = \frac{k(k-1)\dots(h+1)}{(k-h)(k-h-1)\dots 1} $$

Ferner hat:

$$ {}^{k}\overset{h}{\mathfrak{B}} = \frac{k(k-1)\dots(k-(h-1))}{h(h-1)\dots 1} $$

ziehet man den hten Binomialcoefficienten von dem k-hten ab, so ist:

$${}^{k}\overset{k-h}{\mathfrak{B}} - {}^{k}\overset{h}{\mathfrak{B}} = \frac{k(k-1)\ldots(h+1).h.(k-1)..1}{(k-h)\ldots 1.h\ldots 1} - \frac{k(k-1)\ldots(k-(h-1))\ldots 1}{(k-h)\ldots 1.(h..1)} = 0$$

folglich: ${}^{k}\overset{k-h}{\mathfrak{B}} = {}^{k}\overset{h}{\mathfrak{B}}$.

Da nun also ${}^{k}\overset{k-h}{\mathfrak{B}}$ der hte Coefficient, vom Ende der Reihe gerechnet, ist, so folgt, daß die Coefficienten der Binomialreihe, welche um gleich viel Glieder vom Anfange und Ende der Reihe entfernt sind, identisch seyn müssen. Hat man daher erst die eine Hälfte der Reihe berechnet, so ist dadurch die andere gegeben.

Hat man z. B. $(1+x)^{10}$ zu berechnen, so ist der erste Coefficient nach dem anfänglichen $= {}^{10}\overset{1}{\mathfrak{B}} = 10$, der zweite $= {}^{10}\overset{2}{\mathfrak{B}} = \frac{10.9}{1.2} = 45$, der dritte $= {}^{10}\overset{3}{\mathfrak{B}} = \frac{10.9.8}{1.2.3} = 120$, der vierte $= {}^{10}\overset{4}{\mathfrak{B}} = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} = 210$, der fünfte endlich $= {}^{10}\overset{5}{\mathfrak{B}} = \frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5} = 252$, also ist:

$$(1+x)^{10} = 1 + 10x + 45x^2 + 120x^3 + 210x^4 + 252x^5 + 210x^6 + 120x^7 + 45x^8 + 10x^9 + x^{10}$$

Man stellt gewöhnlich den binomischen Lehrsatz in einer andern Gestalt dar, indem man die Basis nicht $1 + x$, sondern $a + b$ setzt. Substituirt man jedoch für x den Werth $\frac{b}{a}$, so ist $(1 + x)^k = (1 + \frac{b}{a})^k = \frac{1}{a^k}(a + b)^k$, folglich hat man:

$$\frac{1}{a^k}(a + b)^k = 1 + {}^{k}\overset{1}{\mathfrak{B}}\frac{b}{a} + {}^{k}\overset{2}{\mathfrak{B}}\left[\frac{b}{a}\right]^2 \ldots + {}^{k}\overset{h}{\mathfrak{B}}\left[\frac{b}{a}\right]^h \ldots \left[\frac{b}{a}\right]^k$$

also:

$$(a + b)^k = a^k + {}^{k}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{k-1}b + {}^{k}\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{k-2}b^2 \ldots + {}^{k}\overset{h}{\mathfrak{B}}a^{k-h}b^h \ldots + b^k$$

Sechster Abschnitt.

Von der Ausziehung der Wurzeln aus zusammengesetzten Formen. Polynomischer und binomischer Lehrsatz für gebrochene und negative Exponenten.

---

§. 65.

Recurrirende Bestimmung.

Es ist aus der Elementar-Arithmetik bekannt, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Wird also die Ausziehung der Wurzel allgemein des nten Grades aus einer Form:

$$\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta}\ldots + \overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta}\ldots$$

verlangt, und man weiß $\left(\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta}\ldots + \overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta}\ldots\right)^{\frac{1}{n}}$ zu berechnen, so hat man das Gesuchte dargestellt. Wir haben den polynomischen Lehrsatz im vorhergehenden Abschnitte streng abgeleitet, allein diese Ableitung erstreckte sich nur auf ganze positive Exponenten, will man ihn auch auf gebrochene und negative Exponenten ausdehnen, so bedarf es noch einer Untersuchung, ob dadurch die Ausdrücke für die Coefficienten dieselben bleiben, oder ob sie dadurch eine andere, vielleicht von der erstern gänzlich verschiedene Gestalt annehmen.

Wir dürfen im Voraus den Satz aufstellen, welchen wir sogleich streng beweisen werden, daß die abgeleitete Recursionsformel zur Berechnung eines jeden Polynomialcoefficienten ganz dieselbe bleibe, der Exponent sey eine ganze oder gebrochene,

positive oder negative Zahl, d. h. wenn man eine Potenz eines Polynomii zu berechnen hat, dessen Exponent $-m$ oder $\frac{n}{m}$ ist, daß man nur nöthig habe, in die bekannte Recursionsformel für k den Werth $-m$ oder $\frac{n}{m}$ zu substituiren, um den $h$ten Coefficienten der zu entwickelnden Potenz zu erhalten. Um dieses darzuthun, braucht man die Richtigkeit der Recursionsformel nur für $\frac{1}{m}$ und -1 zu beweisen, denn, wenn die Recursionsformel für den Exponenten p dieselbe bleibt, wobei wir unbestimmt lassen, was für eine Zahl p ist, so wird sie auch noch für np gelten, wenn n eine ganze positive Zahl ist, denn dadurch wird keine Bedingung in Absicht auf den Exponenten verletzt, p wird dadurch weder negativ noch gebrochen. Gilt daher der Satz für $\frac{1}{m}$, so wird er auch für $\frac{1}{m}.n = \frac{n}{m}$ gelten, gilt er für -1, so wird er auch noch für $(-1).n = -n$ seine Richtigkeit behalten.

Um aber zu zeigen, daß zur Berechnung des $h$ten Coefficienten von $(\overset{1}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots)^{\frac{1}{m}}$ dieselbe Recursionsformel, wie die für den Exponenten k angewendet werden kann, fingire man die Potenz:

$$(\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots \overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta} \ldots)^{\frac{1}{m}} = \overset{0}{A}x^{a} + \overset{1}{A}x^{a+d} \ldots \overset{h}{A}x^{a+hd} \ldots$$

so ist:

$$\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots \overset{h}{a}x^{\alpha+h\delta} \ldots = (\overset{0}{A}x^{a} + \overset{1}{A}x^{a+d} \ldots \overset{h}{A}x^{a+hd} \ldots)^{m}$$

Die Potenz mit dem Exponenten m wird nach Potenzen von x folgendermaaßen fortschreiten:

$$\overset{0}{B}x^{ma} + \overset{1}{B}x^{ma+d} \ldots + \overset{h}{B}x^{ma+hd} \ldots$$

Soll diese Reihe mit der oben angenommenen Basis identisch seyn, so muß sie zuerst der Form nach mit ihr übereinkommen, d. h. es muß $ma = \alpha$, also $a = \frac{\alpha}{m}$, und $d = \delta$ seyn. Dann müssen gleich hohe Coefficienten in beiden gleich seyn, d. h. man hat allgemein:

$$\overset{h}{B} = \overset{h}{a} = \frac{(m-h+1).\overset{h-1}{a}\overset{1}{A} + \ldots + (rm-h+r).\overset{h-r}{a}.\overset{r}{A} \ldots + h.m.\overset{h}{A}}{h.\overset{0}{A}}$$

$$-h\,{}^{0}_{a}\overset{h}{A} = -\frac{{}^{h}_{a}h\overset{0}{A} + (m-h+1)\,{}^{h-1}_{a}\overset{1}{A}\ldots + (rm-h+r)\,{}^{h-r}_{a}\overset{r}{A}\ldots + ((h-1)m-1)\,{}^{1}_{a}\overset{h-1}{A}}{m}$$

$$= \frac{(hm-m-1)}{m}\,{}^{1}_{a}\overset{h-1}{A}\ldots + \frac{(h-r)m-h+(h-r)}{m}\,{}^{r}_{a}\overset{h-r}{A}\ldots + \frac{m-h+1}{m}\,{}^{h-1}_{a}\overset{1}{A} - \frac{h}{m}\,{}^{h}_{a}\overset{0}{A}$$

$$= -\left(\frac{1}{m}-h+1\right){}^{1}_{a}\overset{h-1}{A}\ldots - \left(r\frac{1}{m}-h+r\right){}^{r}_{a}\overset{h-r}{A}\ldots - \left((h-1)\frac{1}{m}-1\right){}^{h-1}_{a}\overset{1}{A} - h\frac{1}{m}\,{}^{h}_{a}\overset{0}{A}$$

also hat man:

$$\overset{h}{A} = \frac{\left(\frac{1}{m}-h+1\right){}^{1}_{a}\overset{h-1}{A}+\ldots+\left(r\frac{1}{m}-h+r\right){}^{r}_{a}\overset{h-r}{A}\ldots+\left((h-1)\frac{1}{m}-1\right){}^{h-1}_{a}\overset{1}{A}+h\frac{1}{m}\,{}^{h}_{a}\overset{0}{A}}{ha}$$

und diese ist dieselbe Recursionsformel, wie die, welche wir für ganze Exponenten abgeleitet haben. Wird daher gefodert, die Wurzel allgemein des nten Grades aus einer gewissen Form zu ziehen, so kann man sich dazu derselben Formel bedienen, als man beim Potenziiren anwandte, und zwar mit der Modification, daß man jetzt statt des Exponenten k den Bruch $\frac{1}{m}$ setzt. Bleibt aber die Formel für den Werth $\frac{1}{m}$ richtig, so gilt sie auch für $\frac{n}{m}$, wie aus dem Vorhergehenden klar ist, und hiemit wäre also der polynomische Lehrsatz für gebrochene Exponenten erwiesen.

Es ist nun noch übrig, zu zeigen, daß die Formel auch für negative Werthe der Exponenten gelte.

Es ist:

$$\left({}^{0}a\,x^{\alpha} + {}^{1}a\,x^{\alpha+\delta}\ldots + {}^{h}a\,x^{\alpha+h\delta}\ldots\right)^{-1} = \frac{1}{{}^{0}a\,x^{\alpha} + {}^{1}a\,x^{\alpha+\delta}\ldots + {}^{h}a\,x^{\alpha+h\delta}\ldots}$$

Sey dieses $= \overset{0}{A}x^{-\alpha} + \overset{1}{A}x^{-\alpha+\delta}\ldots + \overset{h}{A}x^{-\alpha+h\delta}\ldots$

so ist aus der Lehre von der Division klar, daß $\overset{0}{A} = \frac{1}{a} = a^{-1}$ und allgemein:

$${}^{0}_{a}\overset{h}{A} + {}^{1}_{a}\overset{h-1}{A}\ldots + {}^{r}_{a}\overset{h-r}{A}\ldots {}^{h}_{a}\overset{0}{A} = 0$$

ist. Hieraus folgt aber, daß:

$$\overset{h}{A} = \frac{-{}^{1}_{a}\overset{h-1}{A} - \ldots - {}^{r}_{a}\overset{h-r}{A}\ldots - {}^{h}_{a}\overset{0}{A}}{a}$$

$$= \frac{-h\,{}^{1}_{a}\overset{h-1}{A} - \dots - h\,{}^{r}_{a}\overset{h-r}{A} \dots - h\,{}^{h}_{a}\overset{0}{A}}{ah}$$

folglich hat man:

$$\overset{h}{A} = \frac{((-1)-h+1)\cdot{}^{1}_{a}\overset{h-1}{A} + \dots + (r(-1)-h+r)\,{}^{r}_{a}\overset{h-r}{A} \dots + (-1)h\cdot{}^{h}_{a}\overset{0}{A}}{ah}$$

eine Recursionsformel, welche mit der für ganze Exponenten einerlei ist; gilt die Formel aber für den Werth des Exponenten -1, so gilt sie auch für $-m$, und man hat daher, wenn allgemein $\left({}^{0}_{ax}{}^{\alpha} + {}^{1}_{ax}{}^{\alpha+\delta} \dots {}^{h}_{ax}{}^{\alpha+h\delta} \dots\right)^{k}$ zu entwickeln ist, wobei es gleichgültig ist, ob k eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl ist, zur Berechnung des $h$ten Coefficienten dieser Entwickelung die allgemeine Recursion:

$$\overset{h}{A} = \frac{(k-h+1)\,{}^{1}_{a}\overset{h-1}{A} + \dots + (rk-h+r)\,{}^{r}_{a}\overset{h-1}{A} \dots + (kh)\,{}^{h}_{a}\overset{0}{A}}{ah}$$

§. 66.

Independente Bestimmung.

Hieraus folgt aber, daß die Coefficienten der entwickelten Potenzen in jedem Falle, der Exponent sey positiv oder negativ, ganz oder gebrochen, auch auf eine und dieselbe independente Weise gebildet werden müssen.

Wir fanden oben für den $h$ten Coefficienten den independenten Ausdruck: ${}^{h}_{p}\overset{k}{C}[0..]$; ist hier k negativ oder gebrochen, so wird dieser Ausdruck sinnlos; indessen können wir ihn noch umformen, daß dabei der Exponent, k, nicht als Klassen-Exponent erscheint.

Wir fanden (§. 26. S. 89.) die allgemeine recurrirende Beziehung:

$${}^{h}\overset{k}{C}[q..] = {}^{h-(k-1)q}_{p}\overset{1}{C}_{k-1}[(q+1)..] \dots + {}^{h-(k-r)q}_{g}\overset{r}{C}_{k-r}[(q+1)..] \dots + {}^{h}\overset{k}{C}[(q+1)..]$$

setzt man darin für q den Werth 0, so ist:

$$ {}^{h}\overset{k}{C}[o..] = o^{k-1}\,{}^{h}\overset{1}{C}[1..] \ldots + o^{k-r}\,{}^{h}\overset{r}{C}[1..] \ldots + {}^{h}\overset{k}{C}[1..] $$

Diese Formel bricht nach S. 90, wenn k größer ist als h, schon bei dem hten Gliede ab, so, daß ${}^{h}\overset{h}{C}[1..]$ der letzte Theil der Recursion ist.

Wir wollen nun untersuchen, was diese Gleichung für eine Gestalt bekömmt, wenn wir jede Combinationsform mit ihrer Versetzungszahl multipliciren, d. h. wenn man anstatt ${}^{h}\overset{k}{C}[o..]$, ${}^{h}_{p}\overset{k}{C}[o..]$ schreiben will.

Man nehme aus $o^{k-r}\,{}^{h}\overset{r}{C}[1..]$ irgend eine Form $o^{k-r}.M$, so, daß die Permutationszahl von $M = N$ sey. Wären alle Elemente in M verschieden, so wäre $N = 1.2 \ldots r$, und die Permutationszahl von $o^{k-r} M$, wäre $= \frac{1.2 \ldots k}{1..(k-r)}$ $= k(k-1) \ldots (k-(r-1))$. Da aber in M mehrere gleiche Elemente vorhanden seyn können, und das Product, welches daraus entstehet, als Divisor der Zahl $k(k-1) \ldots (k-(r-1))$ beigefügt werden muß, so folgt, daß dieses Product bekannt seyn muß, wenn man die Permutationszahl von $o^{k-r} M$ berechnen will. Nennen wir es $= y$, so ist $\frac{r(r-1) \ldots 1}{y} = N$, also $y = \frac{r(r-1) \ldots 1}{N}$.

Daher ist die Permutationszahl der Form $o^{k-r} M$

$$ = \frac{k(k-1) \ldots (k-(r-1))}{r.(r-1) \ldots 1} . NM $$

Jede Form aus $o^{k-r}\,{}^{h}\overset{r}{C}[1..]$, wenn sie mit ihrer Permutationszahl multiplicirt werden soll, bekömmt außer der Permutationszahl, welche die Elemente ohne die vorgesetzten oten darbieten, noch den Factor:

$$ \frac{k(k-1) \ldots (k-(r-1))}{r(r-1) \ldots 1} = {}^{k}\overset{r}{\mathfrak{B}} $$

Gedenken wir uns jede Form von $o^{k-r}\,{}^{h}\overset{r}{C}[1..]$ mit ihrer Permutationszahl versehen, und addire sie alle zusammen, so bleibt der gemeinschaftliche Factor ${}^{k}\overset{r}{\mathfrak{B}}$, und $o^{k-r}.N.M$ wird $o^{k-r}\,{}^{h}_{p}\overset{r}{C}[1..]$

Man hat daher:

$$ {}^{h}_{p}\overset{k}{C}[o..] = {}^{k}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,o^{k-1}\,{}^{h}_{p}\overset{1}{C}[1..] + \ldots + {}^{k}\overset{r}{\mathfrak{B}}\,o^{k-r}\,{}^{h}_{p}\overset{r}{C}[1..] \ldots + {}^{k}\overset{k}{\mathfrak{B}}\,o^{o}\,{}^{h}_{p}\overset{k}{C}[1..] $$

Ist k größer als h, so schließt sich der Ausdruck schon bei dem hten Gliede: ${}^{k}\overset{h}{\mathfrak{B}}{}_{o}^{k-h}\,{}^{h}_{p}\overset{h}{C}[1..]$; ist aber h größer als k, in welchem Falle die Reihe bis zum kten Gliede gehet, so werden die Glieder nach dem kten schon von selbst $= 0$, weil ${}^{k}\overset{k+1}{\mathfrak{B}}$, u. s. w. $= 0$ ist. Man drückt sich daher für alle Fälle genügend aus, wenn man

$${}^{h}_{p}\overset{k}{C}[0..] = {}^{k}_{p}\overset{1}{\mathfrak{B}}{}_{o}^{k-1}\,{}^{h}_{p}\overset{1}{C}[1..] \ldots + {}^{k}\overset{r}{\mathfrak{B}}{}_{o}^{k-r}\,{}^{h}_{p}\overset{r}{C}[1..] \ldots {}^{k}\overset{h}{\mathfrak{B}}{}_{o}^{k-h}\,{}^{h}_{p}\overset{h}{C}[1..]$$

setzt. Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $x^{k\alpha + h\delta}$, so hat man das hte Glied der gefoderten Potenz dargestellt. In diesem independenten Ausdrucke kann man für k jeden Werth setzen, ohne dadurch eine ungereimte Foderung zu thun, und damit ist denn der allgemeine Beweis des Polynomialtheorems geschlossen.

Setzt man $\overset{0}{a} = \overset{1}{a} = 1$, $\overset{2}{a}, \overset{3}{a} \ldots = 0$, $\alpha = 0$ und $\delta = 1$, so verwandelt sich das Polynomium in ein Binomium, $1 + x$, und von dem independenten Ausdrucke ist nur das hte und letzte Glied reell, denn da nur erste Elemente vorhanden sind, so kann nur die hte Klasse eine eben so hohe Summe geben; nun ist aber ferner $o^{k-h} = 1$, ${}^{h}_{p}\overset{h}{C}[1..] = 1$ und daher der hte Coefficient von $(1 + x)^k$ ist, wie oben, $= {}^{k}\overset{h}{\mathfrak{B}}$.

Z. B. Es werde verlangt, aus der Form

$$2 - x + 3x^2 - 2x^3 + 5x^4 - 3x^5$$

die Cubicwurzel zu ziehen, und es mögen die successiven Coefficienten nach der Recursionsformel zu entwickeln seyn.

Es ist $\overset{0}{A} = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

$$\overset{1}{A} = \frac{\frac{1}{3}(-1).\,2^{\frac{1}{3}}}{2} = -\tfrac{1}{6}.\,2^{\frac{1}{3}}$$

$$\overset{2}{A} = \frac{(\frac{1}{3}-1).(-1).(-\frac{1}{6}2^{\frac{1}{3}}) + \frac{2}{3}.3.\,2^{\frac{1}{3}}}{4} = \frac{-\frac{1}{9}.2^{\frac{1}{3}} + 2.\,2^{\frac{1}{3}}}{4} = \tfrac{17}{36}.2^{\frac{1}{3}}$$

$$\overset{3}{A} = \frac{(\frac{1}{3}-2)(-1)(\frac{17}{36}\,2^{\frac{1}{3}}) + (\frac{2}{3}-1)(3)(-\frac{1}{6}.\,2^{\frac{1}{3}}) + (-2).\,2^{\frac{1}{3}}}{6}$$

$$= \frac{-113}{648}.\,2^{\frac{1}{3}}$$

u. s. w. Also hat man:

$\sqrt[3]{(2-x+3x^2-2x^3+5x^4-3x^5)} = \sqrt[3]{2} - \frac{1}{6}\sqrt[3]{2}.x + \frac{17}{36}.\sqrt[3]{2}.x^2 - \frac{113}{648}.\sqrt[3]{2}.x^3 \ldots$

Wollte man die Aufgabe independent lösen, und z. B. den dritten Coefficienten berechnen, so ist dieser

$$= \tfrac{1}{3}.\overset{.}{0}^{\frac{1}{3}-1}\;{}^{3}_{p}\overset{1}{C}[1\,..] + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{1.2}.\overset{.}{0}^{\frac{1}{3}-2}\;{}^{3}_{p}\overset{2}{C}[1\,..] + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{1.\,2.\,3}.\overset{.}{0}^{\frac{1}{3}-3}\;{}^{3}_{p}\overset{3}{C}[1\,..]$$

wobei sich die Elemente 0, 1, 2 .. auf die Zahlen 2, — 1, 3, — 2, 5, — 3 beziehen.

Nun ist:

$${}^{3}_{p}\overset{1}{C}[1..] = \quad 3 \quad \text{realisirt} = -2$$

$${}^{3}_{p}\overset{2}{C}[1..] = 2.(12) \quad \text{„} \quad \text{„} \quad = -6$$

$${}^{3}_{p}\overset{3}{C}[1..] = 111 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad -1$$

also der gesuchte Coefficient:

$$\tfrac{1}{3}.2^{-\frac{2}{3}}(-2) + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{1.\,2}.2^{-\frac{5}{3}}(-6) + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{1.\,2.\,3}.2^{-\frac{8}{3}}(-1)$$

$$= -\tfrac{1}{3}.2^{\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{6}2^{\frac{1}{3}} - \tfrac{10}{1296}.2^{\frac{1}{3}} = -\tfrac{113}{648}2^{\frac{1}{3}}$$

wie wir ihn oben gefunden.

Wird verlangt, aus $1+x$ die Würzel des 5ten Grades zu ziehen, und will man sich dazu der Recursionsformel bedienen, so ist

$$\overset{0}{A} = \sqrt[5]{1} = 1$$

$$\overset{1}{A} = \tfrac{1}{5}.\overset{0}{A} = -\tfrac{1}{5}$$

$$\overset{2}{A} = \frac{\frac{1}{5}-1}{2}.\overset{1}{A} = \tfrac{2}{25}$$

$$\overset{3}{A} = \frac{\frac{1}{5}-2}{2}.\overset{2}{A} = \tfrac{6}{125}$$

$$\overset{4}{A} = \frac{\frac{1}{5}-3}{4}.\overset{3}{A} = -\tfrac{21}{625}$$

u. s. w. Also ist:

$$\sqrt[5]{(1+x)} = 1 + \tfrac{1}{5}x - \tfrac{2}{25}x^2 + \tfrac{6}{125}x^3 - \tfrac{21}{625}x^4 \ldots$$

Verlangt man z. B. den vierten Coefficienten independent darzustellen, so ist er $= {}^{\frac{1}{5}}\overset{4}{\mathfrak{B}} = \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1).(\frac{1}{5}-2)(\frac{1}{5}-3)}{1.\,2.\,3.\,4} = -\tfrac{21}{625}.$

Siebenter Abschnitt.

Von der Exponentiation. Ableitung der Exponentialreihe.

---

§. 67.

Independente Bestimmung der Glieder der Exponentialreihe.

Eine Potenz, welche die Hauptgrößen im Exponenten besitzt, heißt eine Exponentialgröße. Dergleichen sind also a^x, $\overset{0}{b}{}^{a}x^{\alpha} + \overset{0}{a}x^{\alpha + \delta}\ldots$ u. dgl. Wir werden uns hier nur mit dem einfacheren Falle, wo der Exponent blos die einfache Hauptgröße ist, beschäftigen. Soll man den Ausdruck $(1 + a)^x$ in eine Reihe entwickeln, so kann dieses nach dem binomischen Lehrsatze geschehen, allein, die Reihe wird nach Potenzen von a fortschreiten, und die Hauptgröße in den successiven Coefficienten enthalten; soll die Reihe nach Potenzen von x regelmäßig fortlaufen, so ist noch eine Umformung erfoderlich.

Man hat:

$$(1 + a)^x = 1 + xa + \frac{x(x-1)}{1.2} a^2 \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-(h-1))}{1.2\ldots h} a^h \ldots$$

Entwickelt man jeden einzelnen Coefficienten dieser Reihe, daß er nach Potenzen von x fortschreitet, addirt alsdann die sämtlichen entwickelten Ausdrücke zusammen, so wird man eine Reihe für $(1 + a)^x$ haben, die nach Potenzen des Exponenten fortläuft.

Es ist:

$$x(x-1).(x-2)\ldots(x-(h-1)) = x\Big(\overset{0}{C}'[1..(h-1)].x^{h-1} - \ldots + (-1)^{r-1}\overset{r-1}{C}'[1..(h-1)].x^{h-r}\ldots$$

$$+ (-1)^{h-1}\overset{h-1}{C}'[..(h-1)].x^0\Big)$$

$$= x^h - \overset{1}{C}'[1..(h-1)].x^{h-1} \ldots + (-1)^{k}_{\cdot}\overset{r}{C}'[1..(h-1)].x^{h-r}_{\cdots} + (-1)^{h-1}_{\cdot}\overset{h-1}{C}'[1..(h-1)]x.$$

und das ganze hte Glied von $(1 + a)^x$ ist daher:

$$\overset{-h}{p}\,a^h x^h - \overset{-h}{p}\,a^h_{\cdot}\overset{1}{C}'[1..(h-1)].x^{h-1}_{\cdot\cdot} + (-1)^r_{\cdot}\overset{-h}{p}\,a^h_{\cdot}\overset{r}{C}'[1..(h-1)].x^{h-r}_{\cdots}$$

$$+ (-1)^{h-1}_{\cdot}\overset{-h}{p}\,a^h\overset{h-1}{C}'[1..(h-1)].x$$

Setzt man in dem rten Gliede dieser Reihe für $h-r$ den Werth n, so, daß also $h = n + r$ ist, so ist

$$(-1)^r_{\cdot}\overset{-(n+r)}{p}_{\cdot}\,a^{n+r}_{\cdot}\overset{r}{C}'[1..(n+r-1)].x^n$$

derjenige Theil des nten Gliedes der ganzen Entwickelung von $(1 + a)^x$, welchen das hte oder $n+r$te Glied der obigen Reihe dazu beigetragen hat. Das früheste Glied dieser Reihe, welches x^n enthalten kann, ist aber das nte, setzt man daher in diesem letzten Ausdrucke für r die Werthe von 0 bis zu jeder unbestimmten Weite fort, und addirt die dadurch entstehenden Ausdrücke zusammen, so hat man dasjenige, was alle Glieder der zuerst gefundenen Reihe für $(1 + a)^x$ zu dem nten Gliede desselben Ausdrucks, wenn er nach Potenzen von x fortläuft, beitragen, oder es ist

$$\left[\overset{-n}{p}\,a^n - \overset{-(n+1)}{p}_{\cdot}\,a^{n+1}_{\cdot}\overset{1}{C}'[1..n]. \ldots + (-1)^r_{\cdot}\overset{-(n+r)}{p}_{\cdot}\,a^{n+r}_{\cdot}\overset{r}{C}'[1..(n+r-1)]..\right]x^n$$

der independente Ausdruck für das nte Glied der Entwickelung von $(1 + a)^x$.

Das erste Glied wird bedeutend einfacher, denn setzt man für n den Werth 1, so ist das erste Glied nach dem anfänglichen =

$$\left[a - \overset{-2}{p}\,a^2_{\cdot}\overset{1}{C}'[1.] \ldots + (-1)^r_{\cdot}\overset{-(r+1)}{p}_{\cdot}\,a^{r+1}_{\cdot}\overset{r}{C}'[1..r]\ldots\right].x$$

Nun ist aber allgemein $\overset{r}{C}'[1..r] = 1.\,2.\,3\ldots r = \overset{r}{p}$, folglich ist das rte Glied dieses Ausdrucks $= (-1)^r_{\cdot}\frac{a^{r+1}}{r+1}$, und er selbst:

$$\left(a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} \ldots + (-1)^{r-1}\frac{a^r}{r}\ldots\right)x.$$

§. 68.

Recurrirende Bestimmung.

Nennt man der Kürze wegen den Coefficienten des nten Gliedes, oder den, welcher zu x^n gehört, $\overset{n}{K}$, so hat man:

$$\overset{n}{K} = p^{-n} a^n - \overset{1}{C}'[1..n].\, p^{-(n+1)} a^{n+1} \ldots + (-1)^r \overset{r}{C}'[1..(n+r-1)]\, p^{-(n+r)} . a^{n+r} \ldots$$

$$\overset{1}{K} = a - \frac{a^2}{2} \ldots + (-1)^r \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

multiplicirt man diese beiden Reihen mit einander, und ordnet das Product nach den Potenzen von a, so findet man nach dem Vorhergehenden den Coefficienten zu a^{n+r+1},

$$(-1)^r . \Big(\overset{r}{C}'[1..(n+r-1)].\, p^{-(n+r)} + \tfrac{1}{2}\, \overset{r-1}{C}'[1..(n+r-2)].\, p^{-(n+r-1)}$$

$$\ldots + \overset{r-h}{C}'[1..(n+r-(h+1))].\, \frac{1}{h+1}.\, p^{-(n+r-h)} \ldots + \overset{0}{C}'[1..(n-1)] \frac{1}{r+1} .\, p^{-n}\Big)$$

Multiplicirt man jedes Glied dieses Coefficienten von a^{n+r+1} mit p^{n+r}, indem man außerhalb der Klammer den Factor $p^{-(n+r)}$ beifügt, damit der Werth desselben nicht geändert werde, so wird dieser Ausdruck:

$$(-1)^r . p^{-(n+r)} . \Big[\overset{r}{C}'[1..(n+r-1)] + \overset{r-1}{C}[1..(n+r-2)].\, \tfrac{1}{2}.(n+r)$$

$$\ldots + \overset{r-h}{C}'[1..(n+r-(h+1))] \frac{1}{h+1}.(n+r)..n+r-(h-1) \ldots \overset{0}{C}'[1..(n-1)] \frac{1}{r+1}(n+r)..(n+1).$$

Nun ist aber:

$$\overset{r}{C}'[1..(n+r-1)] + \overset{r-1}{C}'[1..(n+r-2)](n+r) \ldots + \overset{r-h}{C}'[1..(n+r-(h+1))](n+r).(n+r-(h-1))$$

$$\ldots \overset{0}{C}'[1..(n-1)]\,(n+r)..(n+1) = \overset{r}{C}'[1..(n+r)]$$

(§. 15. S. 41.)

Man findet durch eine leichte Betrachtung, wenn jedes Glied dieser Recursionsformel mit einem Bruche multiplicirt wird, dessen Zähler = 1, dessen Nenner aber = dem Index des Gliedes + 1 ist, so, daß allgemein das hte Glied den Factor

$\frac{1}{n+1}$ bekommt, daß dadurch der Ausdruck $\overset{r}{C}'[1..(n+r)]$ den Factor $\frac{n+1}{n+r+1}$ angenommen habe.

Man hat also:

$$\frac{n+1}{n+r+1}.\overset{r}{C}'[1..(n+r)] = \overset{r}{C}'[1..(n+r-1)] + \ldots$$

$$\frac{1}{h+1}.\overset{r-h}{C}'[1..(n+r-(h+1))](n+r)..(n+r-(h-1))\ldots\frac{1}{r+1}\overset{0}{C}'[1..(n-1)](n+r)..(n+1)$$

Da nun dieser Ausdruck derselbe ist, wie der für den rten Coefficienten von $\overset{n}{K}.\overset{1}{K}$, außer, daß dieser noch den Factor $(-1)^r.\,p^{-(n+r)}$ besitzt, so folgt, daß allgemein das rte Glied von $\overset{n}{K}.\overset{1}{K}$

$$= (-1)^r.\,p^{-(n+r)}.\,\frac{n+1}{n+r+1}.\,\overset{r}{C}'[1..(n+r)].\,a^{n+r+1}$$

$$= (-1)^r.\,p^{-(n+r+1)}.\,(n+1).\,\overset{r}{C}'[1..(n+r)].\,a^{n+r+1}$$

ist. Man hat daher:

$$\overset{n}{K}.\overset{1}{K} = (n+1).\,p^{-(n+1)}.\,a^{n+1} - (n+1).\,p^{-(n+2)}.\,\overset{1}{C}'[1..(n+1)].\,a^{n+2}\ldots$$
$$+ (-1)^r(n+1).\,p^{-(n+r+1)}\,\overset{r}{C}'[1..(n+r)].\,a^{n+r+1}\ldots$$

also:

$$\frac{\overset{n}{K}.\overset{1}{K}}{n+1} = p^{-(n+1)}.\,a^{n+1} - p^{-(n+2)}.\,\overset{1}{C}'[1..(n+1)].\,a^{n+2}\ldots + (-1)^r\,p^{-(n+r+1)}.\,\overset{r}{C}'[1..(n+r)].\,a^{n+r+1}\ldots$$

und dieser Ausdruck ist nach dem Vorhergehenden $= \overset{n+1}{K}$ folglich hat man unter dem Coefficienten folgende Recursion:

$$\overset{n+1}{K} = \frac{\overset{n}{K}.\overset{1}{K}}{n+1}$$

oder für n den Werth n-1 gesetzt:

$$\overset{n}{K} = \frac{\overset{n-1}{K}.\overset{1}{K}}{n}$$

Auf eben diese Art würden auch die Potenzen von $\overset{1}{K}$ recurriren, wenn nicht in diesem Ausdrucke der Divisor n vorhanden wäre, denn es ist:

$$\overset{1}{K}^{n} = \overset{1}{K}.\overset{1}{K}^{n-1}$$

allein multiplicirt man K^n mit $\overset{-n}{p}$, so hat man:

$$\overset{-n}{p}.\overset{1}{K}^{n} = \frac{\overset{1}{K}.\overset{-(n-1)}{p}.\overset{1}{K}^{n-1}}{n}$$

Diese Recursionsformel ist aber mit jener vollkommen identisch, und man hat daher, wenn man die Constante gehörig bestimmt hat:

$$\overset{n}{K} = \overset{1}{K}^{n}.\overset{-n}{p} = \frac{\overset{1}{K}^{n}}{1.2..n}$$

Es ist daher:

$$(1 + a)^{x} = 1 + Ax + \frac{A^{2}x^{2}}{1.2} + \frac{A^{3}x^{3}}{1.2.3} \ldots + \frac{A^{r}x^{r}}{1.2..r} \ldots$$

Der independente Ausdruck ist ziemlich zusammengesetzt, allein diese recurrirende Bestimmung erscheint desto einfacher, so, daß es keine Schwierigkeiten haben kann, diese Reihe, welche man die Exponentialreihe nennt, so weit man will zu berechnen, wenn man erst den ersten Coefficienten, A, dargestellt hat, welches leicht ist, aber, wie aus seiner Gestalt erhellet, durch Näherung geschehen muß.

